島根大農研報 (Bull. Fac. Agr. Shimane Univ.) **19** : 22−28, 1985

生長曲線の検討

第3報　Weibull 型生長曲線式の適合性

山本充男*・安井　鈞*

Analysis of Growth Curve
3. Applicability of the Weibull-type Growth Equation.

Mitsuo YAMAMOTO and Hitoshi YASUI

Assuming that the growth rate is the function of not only size but also time, the system of growth is reduced to

$$\frac{dy}{dt}=f(t,\ y)$$

where $f(t,\ y)$ is the function of time t and size y. Let us assume that

$$f(t,\ y)=Cmt^{m-1}(A-y)$$

where A, C, and m are constants, a new growth equation

$$y=A(1-\exp[-Ct^m])$$

is derived. This equation is the same as one which is created by adding an expanding factor to the Weibull distribution function.

To examine the applicability of this equation, the Weibull-type growth equation was applied to the observed growth of diameter, height, basal area, and volume of 52 trees. The Weibull-type growth equation showed a good fit to the growth not only with a clear inflection but also without one, as compared with the Mitscherlich, the Logistic, and the Gompertz. It was recognized that many monotonically increasing growth phenomena could be modelled by this equation with various numerical values for the scale (C), the shape (m), and the upper asymptote (A) parameters.

緒　　言

生長曲線（式）とは生長経過という複雑な現象を，その本質を失うことなく，モデル化・数式化し，できるかぎり単純な形で表現しようとするものである．この生長曲線式が具備すべき要件として，大隅ら（大隅・石川，1983)[1]は次の4つに要約している．

1．生長現象の発現のメカニズムに関する生物学的認識にその理論的基礎をおくものであること．
2．生長現象を充分記述する能力を有すること．（記述性）
3．生長現象をよく解析して説明し，理解せしめる能力を有すること．（解析性）
4．母数の合理的な推定と，それによる生長予測を可能ならしめる能力を有すること．（予測性）

過去，多くの研究者がさまざまな形の生長曲線式を研究し，発表しているが，上記の要件をほぼ満足するものとしては Mitscherlich 式，Logistic 式，Gompertz 式，Richards 式などがあげられる．これら4つの式はとも

*　森林計画学研究室

に生長速度に着目し，誘導されたものである．生長速度に関するそれぞれの仮定は異なるが，生長速度$\frac{dy}{dt}$が現在の大きさ y の関数 $f(y)$ である．すなわち，

$$\frac{dy}{dt}=f(y)$$

という点では共通している．ここでは，単に生長速度が現在の大きさによるものとは考えずに，それまでに要した時間（年齢）をも考慮した場合について考える．すなわち，時間を t とすると，

$$\frac{dy}{dt}=f(t,y)$$

という関数形を考えることにする．

松村ら（松村・山本，1983)[2]は分布関数である Weibull 分布の密度関数の形をかり，

$$\frac{dy}{dt}=Cmt^{m-1}(A-y)$$

なる Weibull 型生長曲線式を誘導した．ただし，A, C, m は定数である．本論では，まず Weibull 型生長曲線式の基となった Weibull 分布関数について触れ，さらに，Weibull 型生長 曲線式の解と性質について説明する．また，実際にこの曲線式を実測値にあてはめ，Weibull 型生長曲線式の樹木の生長現象に対する適合性について，他の曲線式と比較，検討する．

なお，あてはめ計算等は森林計画学研究室所有のパーソナルコンピュータ NEC-PC9801F を用いて行った．

Weibull 分布関数

Weibull 分布はもともと機器等の部品の寿命分布として用いられてきたものである．これはランダムさをもって起こる事象（原因）が起った時，寿命の尽きる確率（時間とともに変わる条件付確率）によって部品の寿命が決まるという考えより誘導されている．その条件付確率が部品の時間（それまでに壊れずにすんだ時間）の何乗かに比例するとしている．Weibull 分布の確率密度関数 $f(t)$ および分布関数 $F(t)$ はそれぞれ

$$f(t)=\begin{cases}Cmt^{m-1}\exp[-Ct^m] & t\geqq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

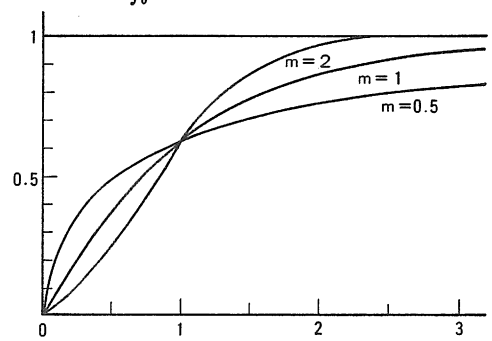
$$F(t)=\int_0^t f(\tau)\,d\tau=1-\exp[-Ct^m]$$

となる．ここで C, m は定数で，C を尺度母数，m を形状母数と呼ぶ．分布関数 $F(t)$ の概略図を図-1，2に示す．図-1は，尺度母数 C を一定（=1）とした時に，形状母数 m の値によって分布関数の形状がどのように変化するかを示したものである．m の値が1をこえると変曲点を有するS字曲線となる．1以下では，変曲点のない常に上に凸の曲線となる．図-2は，形状母数 m を一定（=2）とした時，尺度母数 C の値によってどのように変化するかを示したものである．形状そのものは変わらないが，C の値が大きくなるにつれ分布関数の立ち上がりが早くなっていることがわかる．

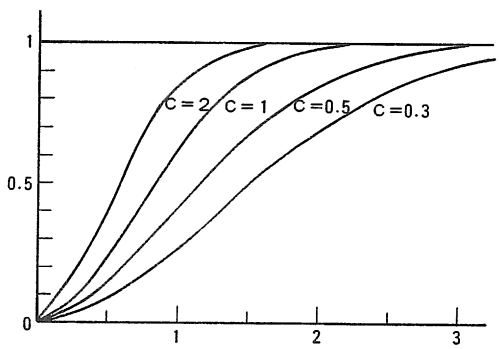
Weibull 型生長曲線式の解と性質

一般に，分布関数 $F(t)$ は t が無限大に近づくと，その値は1に近づく．この挙動は時間の経過とともに生長の上限に近づくという生長現象によく似ている．分布関数にある係数を乗じて時間が無限大に近づく時，ある値に近づくようにすれば，一種の生長曲線を得ることができる．R. C. Yang ら（R. C. Yang, A. Kozak & J. H. G. Smith, 1978)[3]はこの係数を「拡大係数（Expanding Factor)」と呼び，Weibull 分布より，生物の生長現象によく適合する生長曲線を得ている．しかし，そこには生長現象への適合度のみについて考え，生長現象を説明するためのモデルとしての考えは欠けている．ただ，「拡大係数」について，「拡大係数 A はそれを条件付けるような遺伝的性質と環境的因子によって規定される生物の大きさの上限値を示す」と述べている．このことを考慮しながら Weibull 型生長曲線式について説明する．

Weibull 生長曲線式は，生長速度が単に現在の大きさのみの関数ではなく，それまでに要した時間の関数でもあると考えて導びかれたものである．ただ，時間の関数として，どのような形にするかという点において，分布関数としての Weibull 分布に着目し，時間のベキ乗という関数形を用いている．これは，Weibull 分布の形状の柔軟性を利用しようとしたものである．Weibull



図―1 Weibull 分布関数概略図
（C=1 として mを変えた場合）



図―2 Weibull 分布関数概略図
（m=2 として C を変えた場合）

型生長曲線式の生長速度方程式は

$$\frac{dy}{dt}=Cmt^{m-1}(A-y) \qquad (1)$$

と書け，生長速度が「大きさの上限値と現在の大きさの差（$A-y$）と年齢のベキ乗に比例する」と規定することができる．(1)式の微分方程式を解くことにより，

$$y=A(1-\exp[-Ct^m]) \qquad (2)$$

という Weibull 型生長曲線式を得る．ここで，パラメータ A は Yang らの述べているように生長の上限を示すパラメータで，C は生長速度定数，m は Weibull 分布でいうところの形状母数，すなわち，生長曲線の形状，生長経過の様子を理解するためのパラメータと解釈することができる．次に，この Weibull 型生長曲線式の性質について考察する．

変曲点　(1)式をさらに t で微分すると，

$$\frac{d^2y}{dt^2}=ACmt^{m-2}\exp[-Ct^m]\cdot(-Cmt^m+m-1)$$

となり，これより $\frac{d^2y}{dt^2}=0$ とおけば，

$$t=\left(1-\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{m}}\left(\frac{1}{C}\right)^{\frac{1}{m}},\ t=0$$

を得る．$t\geqq 0$ の範囲では，実質的に変曲点は $m\geqq 1$ の場合に現われ，その座標は

$$t=\left(1-\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{m}}\left(\frac{1}{C}\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$y=A\left(1-\exp\left[\frac{1}{m}-1\right]\right)$$

となる．また，変曲点の y 座標の値の取り得る範囲は，$m\geqq 1$ であるので，

$$0\leqq y\leqq 0.6321A$$

となる．また，この曲線の形状は，$m<1$ の場合，すべての $t(\geqq 0)$ に対して常に上に凸である．$m\geqq 1$ の場合には，変曲点まで下に凸，それ以降は上に凸の曲線となる．

漸近線(2)式において，

$t\to\infty$ のとき　$y\to A$

となり，漸近線は上に一本存在し，その漸近線は

$$y=A$$

となる．

パラメータの次元 Weibull 型生長曲線式には，A, C, m の3つのパラメータがある．これらの次元は時間を[T]，長さを[L]とすると，

$m=$[無次元]

$C=[T^{-m}]$

となり，A については，取り扱う量によって異なり，直径，樹高のような長さに対して一次元の量の場合は，

$A=[L]$

となる．胸高断面積，材積の場合には，それぞれ，

$A=[L^2]$

$A=[L^3]$

となる．

資料と方法

資料としては，第1報（山本・安井・秋山，1982)[4] において用いた4試験地，52樹幹解析木の測定結果を用いた．試験地名，樹種，資料木数はそれぞれ次のとおりである．

二俣試験地（石川県輪島市二俣町堂ノ下)[5]

樹種：アテ　12本

山本試験地（石川県山本町大字茶志尻)[6]

樹種：アテ　18本

鳥取大学農学部蒜山演習林19林班い小班[7]

樹種：コナラ　7本

鳥取大学農学部蒜山演習林17林班は小班[8]

樹種：クヌギ　15本

資料木の試験地ごとの伐倒時における年齢，胸高直径，樹高，胸高断面積，材積の範囲を表-1に示す．

次に，あてはめ方法について説明する．資料木の胸高直径，樹高，胸高断面積，材積の生長記録に Weibull 型生長曲線式を最小二乗法によりあてはめを行う．その際従来の正規方程式による最小二乗法を適用するのは不可能であり，デミングの最小二乗法(デミング，W.E., 1968)[9] を用いて式中のパラメータの値を決めた．デミングの方法では各パラメータに対する初期値が必要であるが，その初期値は次の手順により求めた．

(2)式において，$m=1$ とすると，

$$y=A(1-\exp[-Ct]) \qquad (3)$$

となり，これは一種の Mitscherlich 式である．そこで，Mitscherlich 式の差分における直線関係の性質を利用して，回帰直線の切片ならびに傾きからパラメータ

表—1　試験地別資料木の伐倒時の大きさ

試験地	樹種	本数	年齢(年)	胸高直径(cm)	樹高(m)	胸高断面積(m^2)	材積(m^3)
二俣	アテ	12	36-72	5.7-24.3	5.8-16.7	0.0026-0.0464	0.0092-0.3754
山本	アテ	18	39-89	4.4-25.9	4.3-19.3	0.0015-0.0527	0.0046-0.5624
蒜山	コナラ	7	44-50	10.8-23.2	14.0-16.7	0.0092-0.0423	0.0605-0.2755
蒜山	クヌギ	15	42-54	9.4-24.7	9.6-15.9	0.0069-0.0477	0.0314-0.3474

A, C の初期値を求める．この時，m の初期値は1とする．

このようにして，各資料木の各生長因子に Weibull 型生長曲線式をあてはめる．同時に，Mitscherlich 式，Logistic 式，Gompertz 式もあてはめを行い，これら4曲線式の適合度を比較する．あてはめ結果の比較方法については，ここで用いた4曲線式ともパラメータの数が同じであるので，比較の際パラメータの数を考慮する必要がない．比較は単に測定値と推定値との間の残差平方和のみによった．すなわち，各資料木の各生長因子ごとに残差平方和を計算し，4曲線式間で残差平方和の小さい順に1，2，3，4と順位をつけ，その順位づけ結果より Weibull 型生長曲線式の適合度について考察を行った．

表—2　胸高直径に対する各曲線式の順位

曲線式	Weibull				Mitscherlich				Losistic				Gompertz			
順位	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
二俣・アテ	1	6	4	1	5	0	3	4	2	0	3	7	4	6	2	0
山本・アテ	2	7	7	2	11	0	2	5	3	1	3	11	2	10	6	0
蒜山・コナラ	4	2	1	0	2	3	1	1	0	1	0	6	1	1	5	0
蒜山・クヌギ	4	10	1	0	11	3	1	0	0	0	0	15	0	2	13	0
計	11	25	13	3	29	6	7	10	5	2	6	39	7	19	26	0

表—3　樹高に対する各曲線式の順位

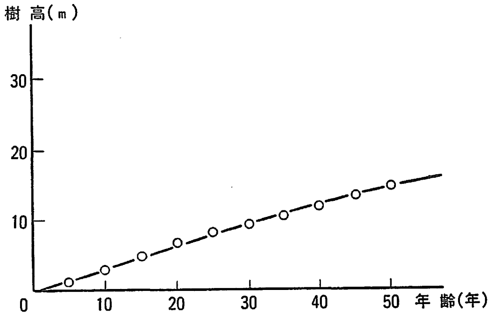
曲線式	Weibull				Mitscherlich				Losistic				Gompertz			
順位	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
二俣・アテ	3	3	6	0	0	0	2	10	5	1	4	2	4	8	0	0
山本・アテ	2	5	11	0	0	1	0	17	13	2	2	1	3	10	5	0
蒜山・コナラ	2	4	1	0	4	2	0	1	1	0	0	6	0	1	6	0
蒜山・クヌギ	6	5	4	0	6	5	1	3	0	2	1	12	3	3	9	0
計	13	17	22	0	10	8	3	31	19	5	7	21	10	22	20	0

表—4　胸高断面積に対する各曲線式の順位

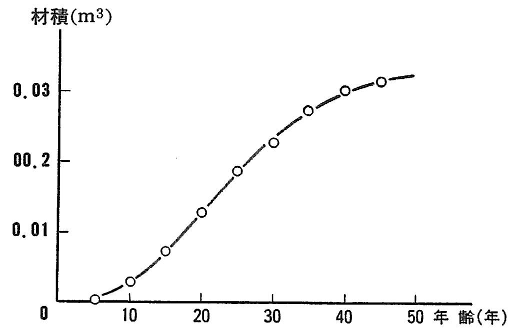
曲線式	Weibull				Mitscherlich				Losistic				Gompertz			
順位	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
二俣・アテ	3	8	1	0	2	0	0	10	2	2	7	1	5	2	4	1
山本・アテ	3	10	4	1	5	0	3	10	4	1	6	7	6	7	5	0
蒜山・コナラ	2	5	0	0	3	2	0	2	2	0	0	5	0	0	7	0
蒜山・クヌギ	5	9	1	0	7	1	5	2	0	0	2	13	3	5	7	0
計	13	32	6	1	17	3	8	24	8	3	15	26	14	14	23	1

表—5　材積に対する各曲線式の順位

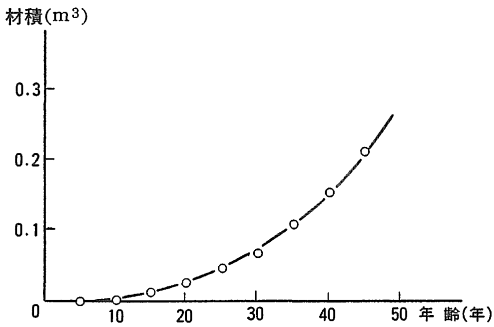
曲線式	Weibull				Mitscherlich				Losistic				Gompertz			
順位	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
二俣・アテ	5	6	1	0	1	0	1	10	4	4	3	1	2	2	7	1
山本・アテ	2	14	2	0	0	0	0	18	5	3	10	0	11	1	6	0
蒜山・コナラ	3	4	0	0	2	1	1	3	1	0	2	4	1	2	4	0
蒜山・クヌギ	11	4	0	0	2	2	5	6	0	0	6	9	2	9	4	0
計	21	28	3	0	5	3	7	37	10	7	21	14	16	14	21	1



図—3　樹高に対する Weibull 型生長曲線式のあてはめ結果
(A=26.7, C=0.00893, m=1.14)



図—4　材積に対する Weibull 型生長曲線式のあてはめ結果
(A=0.0329, C=0.000492, m=2.30)



図—5　A がマイナスとなった Weibull 型生長曲線式のあてはめ結果
(A=−0.602, C=−0.0000319, m=2.40)

結果と考察

各生長因子ごとの残差平方和による順位づけの結果は，表-2，3，4，5に示すとおりである．各表ともそれぞれの曲線式が1位，2位，3位，4位になった回数が試験地ごとに示してある．すなわち，1位の回数が多い程他の式に比べて良いあてはまりを示していることになる．

Weibull 型生長曲線式は4位になった数が少なく，胸高直径で3回，胸高断面積で1回の計4回だけであるまた，3位の回数が比較的少なく，順位を単に1，2，3，4と数量化し算術平均を求めると，胸高直径の場合では，Weibull 型生長曲線式が 2.15，Mitscherlich 式が1.96，Logistic 式が 3.51，Gompertz 式が 2.36 となる．樹高については，Weibull型生長曲線式は 2.17，以下曲線順に 3.05，2.57，2.19 となる．また，胸高断面積では，1.90，2.75，3.13，2.21，さらに，材積では，1.65，3.46，2.75，2.13 という結果になる．また，測定値へのあてはまりの様子は図-3，4のとおりで，変曲点の有無にかかわらず良いあてはまりを示している．これらのことから，Weibull 型生長曲線式は各資料，各生長因子に対して優れたあてはまりをみせ，一般に用いられてきた他の3曲線式と比較しても高い適合度を示すものと考えられる．

以上は，残差平方和を小さくするように，特にパラメータに条件を付けずに行った結果である．そのため，中には図-5に示すように，上限値を示すパラメータ A の値がマイナスになるものがあった．図-5に示すようにあてはまりそのものは良いが，生長現象を理解する上で，大きさの上限値がマイナスとなることは不合理である．これは，Weibull 型生長曲線式の漸近線が一本 ($y=A$) しかないことによるものである．よって，Weibull 型生長曲線式をあてはめる場合，$A>0$ となる条件を付けた最小二乗法により再び Weibull 型生長曲線式のあてはめを行った．そうして得た結果を，上の場合と同じように順位づけると表-6，7，8，9のようになる．条件づきの最小二乗法によるあてはめ結果は，条件なしの場合に比べ若干悪くなっているが，他の曲線式と比べて劣ることはなかった．

Weibull 型生長曲線式のあてはまりについてまとめると，全般的に高い適合性を示し，生長経過をよく表現することができる曲線式であると言える．これは，Weibull 型生長曲線式が変曲点の位置を変え得るということに由来し，極めて柔軟性に富む曲線式であるからである．ただ，$t=0$ のとき常に $y=0$ と固定してあるので，ある種の特異な資料に対する適合度は悪くなるが，それほど問題にする程のことはないと考える．また Weibull 型生長曲線式は一種の二重指数関数で複雑な形をしているので，あてはめ計算には細心の注意を要する．

表—6　条件つき最小二乗法による胸高直径に対する各曲線式の順位

曲線式	Weibull				Mitscherlich				Losistic				Gompertz			
順位	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
二俣・アテ	1	5	4	2	5	0	3	4	2	0	4	6	4	7	1	0
山本・アテ	2	5	9	2	11	0	2	5	3	1	3	11	2	12	4	0
蒜山・コナラ	4	2	1	0	2	3	1	1	0	1	0	6	1	1	5	0
蒜山・クヌギ	4	10	1	0	11	3	1	0	0	0	0	15	0	2	13	0
計	11	22	15	4	29	6	7	10	5	2	7	38	7	22	23	0

表—7　条件つき最小二乗法による樹高に対する各曲線式の順位

曲線式	Weibull				Mitscherlich				Losistic				Gompertz			
順位	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
二俣・アテ	3	3	4	2	0	0	4	8	5	1	4	2	4	8	0	0
山本・アテ	2	5	10	1	0	1	1	16	13	2	2	1	3	10	5	0
蒜山・コナラ	1	5	1	0	5	1	0	1	1	0	0	6	0	1	6	0
蒜山・クヌギ	6	5	4	0	6	5	1	3	0	2	1	12	3	3	9	0
計	12	18	19	3	11	7	6	28	19	5	7	21	10	22	20	0

表—8　条件つき最小二乗法による胸高断面積に対する各曲線式の順位

曲線式	Weibull				Mitscherlich				Losistic				Gompertz			
順位	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
二俣・アテ	3	7	2	0	2	0	0	10	2	3	6	1	5	2	4	1
山本・アテ	3	10	4	1	5	0	3	10	4	1	6	7	6	7	5	0
蒜山・コナラ	2	5	0	0	3	2	0	2	2	0	0	5	0	0	7	0
蒜山・クヌギ	5	8	2	0	7	1	5	2	0	0	2	13	3	5	7	0
計	13	30	8	1	17	3	8	24	8	4	14	26	14	14	23	1

表—9　条件つき最小二乗法による材積に対する各曲線式の順位

曲線式	Weibull				Mitscherlich				Losistic				Gompertz			
順位	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
二俣・アテ	5	6	0	1	1	0	1	10	4	4	3	1	2	2	8	0
山本・アテ	2	14	2	0	0	0	0	18	5	3	10	0	11	1	6	0
蒜山・コナラ	2	5	0	0	2	1	2	2	1	0	1	5	2	1	4	0
蒜山・クヌギ	10	4	1	0	2	2	5	6	0	0	6	9	3	9	3	0
計	19	29	3	1	5	3	8	36	10	7	20	15	18	13	21	0

結　　　言

生長速度を単に大きさだけの関数と考えずに t^{m-1} という項を加え，$f(t, y)$ という現在の大きさ y と年齢 t の二変数関数として取り扱った．それより得た曲線式は樹木の生長現象において，優れた適合性を示すものであることがわかった．パラメータの数を増やせば，あてはまりが良くなるのは当然であるが，残差平方和が小さいだけで，優れた生長モデルとはいえない．Weibull 型生長曲線式は他の3曲線式と同数の3つのパラメータを有する．同じパラメータ数で他のものより良い適合度を示したことは，生長現象のモデル化として優れたものであると言える．Weibull 型生長曲線式が，さらに，生長モデルとして有効なものであるかどうか結論づけるためには，基礎となる資料の量，質とも充実し Weibull 型生長曲線式のもつ解析性ならびに予測性などに関して研究を重ねる必要があると考える．

謝辞　本研究を行うにあたり，協力していただいた元専攻生の石原匡師君に深く感謝する．

引　用　文　献

1. 大隅真一・石川善朗：京府大学術報告　**35**：49-76，1983．
2. 松村直人・山本充男：林統研誌 8：37-42，1983．
3. YANG, R. C., A. KOZAK, J. H. G. SMITH：Can. J. For. RES. 8：424-430, 1978.
4. 山本充男・安井　鈞・秋山郁男：島根大農研報**16**：48-52，1982．
5. 岡田泰紀・島根大農卒論，29pp，1967．
6. 九十九剛：島根大農卒論，52pp，1967．
7. 出田龍彰：島根大農卒論，103pp，1972．
8. 鈴木和寿：島根大農卒論，102pp，1972．
9. デミング，W. E.：推計学によるデータのまとめ方，196pp，岩波書店，東京，1950．