島根大農研報 (Bull. Fac. Agr. Shimane Univ.) **16** : 53-56, 1982

対数正規分布とその応用

第1報　直径分布へのあてはめ

山本　充男*・安井　鈞*・本田　秀昭*

Mitsuo YAMAMOTO, Hitoshi YASUI, Hideaki HONDA

Lognormal distribution and its applications

1. Fitting to diameter distributions

緒　言

生物学データの頻度分布の多くが，対数正規性を示すことは経験的に知られている．それは累積頻度をプロビットなどに交換し，これに対応する階級の対数変換値との関係をグラフ上に打点すれば，そこに直線が得られることから解る．しかしこの関係が，しばしば曲線を描くことがある．このような場合には，階級値にある定数を加えた値を対数変換すれば直線関係が得られることがある．前者は2母数対数正規性であり，後者は3母数対数正規性である．林木の胸高直径の頻度分布がこのような3母数対数正規性を示すことを Bliss and Reinker (1964)[2]は，Mayer (1930)[4]がシャーリエ曲線の近似を行った同じ資料を用いて実験的に示した．本論では，まず対数正規分布の特徴を明らかにするとともに，同様の手法を用い林齢別の直径分布資料にあてはめならびにカイ二乗分布による適合度検定結果について報告する．また，正規分布との違いについて考察する．

対 数 正 規 分 布

対数正規分布は，観測値あるいは観測値にある定数を加えたものに対数変換を行ったものの母集団が正規になる母集団分布のことである．つまり，正の値のみをとる確率変数 y あるいは $y+y_0$ の対数をとったとき $x=\log y$, $x=\log(y+y_0)$ の分布が正規分布 $N(x|\mu, \sigma^2)$ になるとき y の従う分布をいう．[1)]

* 森林計画学研究室

2母数対数正規分布 $LN(y|\mu, \sigma^2)$ について述べる．

$$LN(y)=N(\log y) \qquad y>0$$
$$LN(y)=0 \qquad y\leq 0$$

である．密度関数 $\ell(y)$ は y で微分して

$$\ell(y)=0 \qquad y\leq 0$$
$$\ell(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log y-\mu)^2\right\} \qquad y>0$$

である．この分布の中央値 m_e は

$$m_e=\exp(\mu)$$

であることは容易にわかる．最頻値 m_0 は密度関数の対数を y で微分することにより求まる．すなわち，

$$\{\log \ell(y)\}'=\frac{1}{\sigma^2 y}(\mu-\sigma^2-\log y)$$

であるから，密度関数を最大にする m_0 は

$$m_0=\exp(\mu-\sigma^2)$$

となる．次に分布の原点まわりの j 次積率は

$$\mu'_j=\int_0^\infty y^j\,dLN(y)$$
$$=\int_{-\infty}^\infty e^{jx}\,dN(x)$$
$$=\exp\left(j\mu+\frac{1}{2}j^2\sigma^2\right)$$

となる．これより分布の平均 μ_1'，分散 μ_2 は

$$\mu_1'=\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)$$
$$\mu_2=\exp(2\mu+\sigma^2)(\exp(\sigma^2)-1)$$

である．ここで歪度 β_1 は

$$\beta_1=\mu_3^2/\mu_2^3$$

$$=\{\exp(\sigma^2)-1\}\{\exp(\sigma^2)+2\}^2$$

であり，$\sigma^2>0$, $\exp(\sigma^2)>1$ より $\beta_1>0$ である．また，尖度 β_2 は

$$\beta_2=\mu_4/\mu_2{}^2$$
$$=\exp(4\sigma^2)+2\exp(3\sigma^2)+3\exp(2\sigma^2)-3$$

で，$\exp(\sigma^2)>1$ より $\beta_2>3$ である．

次に，本論であてはめに用いた3母数対数正規分布 $LN(y|\mu, \sigma^2, y_0)$ について述べる．

ここでは，2母数対数正規分布の y が $y+y_0$ に変わり，密度関数 $\ell(y)$ は

$$\ell(y)=0 \qquad y\leqq -y_0$$

$$\ell(y)=\frac{1}{(y+y_0)\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log(y+y_0)-\mu)^2\right\}$$
$$y>-y_0$$

となる．分散，歪度，尖度は2母数の場合と同じであるが，中央値，最頻値，平均値が異なり，$-y_0$ だけ平行移動して

中央値　$\exp(\mu)-y_0$

最頻値　$\exp(\mu-\sigma^2)-y_0$

平均値　$\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)-y_0$

となる．

資　　料

資料としては，1977年名古屋大学農学部森林経理学研究室[5)]がカナダ国ノースウェスト準州において行ったジャックパイン（*Pinus banksiana LAMB.*）の天然林調査結果の一部を用いた．資料として用いたプロット名は，Cherry Mt. 1および2である．この資料はプロット内の全立木について生長錐によりコアを採取し，それを年輪測定機により測り，樹齢により逆算して過去の直径分布を 1cm 括約で再現したものである．（表－1，2）

尚，表中の統計量は次の式により計算されている．

平均直径　$\bar{d}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i$

分　散　$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(d_i-\bar{d})^2$

歪　度　$SK=\frac{n}{(n-1)(n-2)}\sum_{i=1}^{n}(d_i-\bar{d})^3/S^3$

尖　度　$P=\left\{\frac{n^2-2n+3}{(n-1)(n-2)(n-3)}\sum_{i=1}^{n}(d_i-\bar{d})^4 - \frac{3(2n-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\left[\sum_{i=1}^{n}(d_i-\bar{d})^2\right]^2\right\}\Big/S^4$

ただし，n はプロット内の立木数

d_i は i 番目の樹木の直径（i=1, 2,....., n）

表－1　林齢別直径分布表（プロット名 Cherry Mt. 1)

直径階 (cm) 以上未満	林					齢	(年)			
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	47
0 － 1	65	39	13	6	2	1	1	1	1	1
1 － 2	103	83	30	16	12	11	9	7	4	4
2 － 3	115	100	97	49	29	15	11	7	9	9
3 － 4	76	122	128	124	96	72	37	32	26	26
4 － 5	28	76	113	127	118	102	108	89	75	73
5 － 6	2	45	64	86	111	107	86	86	89	82
6 － 7	1	10	38	54	65	84	95	84	74	71
7 － 8		1	10	27	42	51	62	79	85	83
8 － 9		2	1	8	18	37	46	49	53	59
9 － 10			2	3	5	14	29	35	43	46
10 － 11				2	3	5	12	21	19	19
11 － 12					2	2	3	8	16	16
12 － 13						2	2	1	5	10
13 － 14							2	3	2	2
14 － 15								1	1	1
15 － 16									0	0
16 － 17									1	1
Total	390	478	496	502	503	503	503	503	503	503
Mean	2.27	3.14	3.94	4.58	5.09	5.63	6.15	6.52	6.82	6.94
St. D.	1.45	1.54	1.56	1.66	1.75	1.92	2.07	2.20	2.31	2.38
Skew.	0.233	0.231	0.301	0.399	0.480	0.459	0.435	0.418	0.431	0.442
Peaked.	2.574	2.650	3.154	3.428	3.468	3.441	3.323	3.550	3.324	3.318

表－2　林齢別直径分布表（プロット名 Cherry Mt. 2)

直径階 (cm) 以上未満	林					齢	(年)			
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	49
0 － 1	99	61	19	6						
1 － 2	122	83	54	22	14	7				
2 － 3	113	123	102	69	34	16	17	12	11	9
3 － 4	52	102	126	127	111	71	41	32	27	25
4 － 5	7	75	103	130	125	135	118	79	61	51
5 － 6	1	20	65	76	104	120	110	116	113	106
6 － 7		5	16	55	77	72	95	102	100	94
7 － 8		1	7	12	28	56	68	75	82	86
8 － 9		1	1	6	5	18	35	48	53	57
9 － 10			0	1	5	6	12	27	35	37
10 － 11			1	0	1	2	5	6	12	27
11 － 12				1	1	1	3	6	5	6
12 － 13						1	1	1	5	4
13 － 14								1	1	3
Total	394	471	494	505	505	505	505	505	505	505
Mean	1.86	2.79	3.61	4.31	4.85	5.37	5.86	6.30	6.59	6.85
St. D.	1.07	1.47	1.54	1.58	1.58	1.64	1.74	1.85	1.96	2.06
Skew.	0.391	0.287	0.282	0.294	0.469	0.545	0.539	0.489	0.489	0.488
Peaked.	2.572	2.824	3.379	3.622	3.660	3.617	3.441	3.295	3.285	3.186

である．

母数の推定

3母数対数正規分布は母数 y_0 がわかれば，他の母数のμ, σ^2 は対数変換 $\log(y+y_0)$ 後の平均値と分散からすぐに求まる．すなわち，母数 y_0 の推定以外はほとんど正規分布における母数の推定と大差ない．

母数 y_0 を求める方法は種々あたえられているが，ここでは図解による方法と積率解による方法とについて説明する．

Kapteyn (1916)[3] の図解法は，最も古くから一般に用いられている方法である．プロビットとその階級の対数変換値との関係で得られた曲線上の3つの点，つまり，平均値を中心として1.5プロビットだけ違うような点，3.5，5.0，6.5プロビット点に対する横軸上の対数値を読み取り，その真数値 y_1, y_2, y_3 から

$$y_0=\frac{y_2{}^2-y_1y_3}{y_1+y_3-2y_2}$$

として求める方法である．

しかし，この方法では読み取り誤差などが入る恐れがあるので今回は用いなかった．

積率解[6]による方法は，母数 y_0 を平均値，標準偏差さらに歪度の3つの統計量から求めるものである．すなわち，平均値を $\bar{y}$，標準偏差を S，歪度を g とすると，まず

$$C=0.7937\{\sqrt[3]{g+\sqrt{g^2+4}}+\sqrt[3]{g-\sqrt{g^2+4}}\}$$

を計算し，これより

$$y_0=\frac{S}{C}-\bar{y}$$

として求めるものである．尚，0.7937 は $\sqrt[3]{0.5}$ にあたる．この方法はあてはめを電算機で一括処理するのに適しているので，今回はこの方法を採用した．

このようにして求めた y_0 を用い，以下，対数変換値 $\log(y+y_0)$ について正規分布の場合と同じ手順で母数を推定する．各直径分布に対する推定結果は表－3のとおりである．

表－3　各直径分布に対する母数の推定値

プロット 林齢＼母数	CherryMt. 1 μ	σ	y_0	Cherry Mt. 2 μ	σ	y_0
5	2.93	0.064	16.44	2.10	0.128	6.40
10	2.99	0.077	16.90	2.73	0.095	12.62
15	2.74	0.100	11.66	2.79	0.094	12.82
20	2.52	0.132	7.97	2.78	0.097	11.86
25	2.39	0.159	5.94	2.31	0.156	5.34
30	2.53	0.152	7.02	2.19	0.180	3.75
35	2.65	0.145	8.22	2.26	0.177	3.93
40	2.76	0.138	9.37	2.43	0.161	5.15
45	2.77	0.142	9.37	2.48	0.161	5.54
47	2.78	0.146	9.33			
49				2.53	0.161	5.92

結果と考察

各直径分布に対して正規分布ならびに3母数対数正規分布をあてはめ，得られた結果についてカイ二乗分布による適合度検定を行った．各分布に対するカイ二乗値および自由度は表－4，5に示すとおりである．また，表中の＊は有意水準5％で，＊＊は有意水準1％で棄却されたものである．

正規分布については，歪度が大きくなると適合度が悪くなる．しかし，歪度が比較的小さいものには，3母数対数正規分布より良いあてはまりを示している．一方，3母数対数正規分布は全般的に，しかも歪度が大きい程

表－4　Cherry Mt. 1 についての検定結果

林齢(年)	正規分布 カイ二乗値	自由度	対数正規分布 カイ二乗値	自由度
5	1.785	2	5.932	2
10	5.459	4	7.462	4
15	7.866	5	5.731	4
20	15.825*	6	6.563	4
25	16.648*	6	6.805	5
30	19.467**	7	10.972	6
35	30.883**	7	22.776**	7
40	25.725**	8	11.215	7
45	27.166**	9	11.871	8
47	27.484**	9	13.076	8

表－5　Cherry Mt. 2 についての検定結果

林齢(年)	正規分布 カイ二乗値	自由度	対数正規分布 カイ二乗値	自由度
5	5.488	2	9.346**	1
10	4.807	4	10.547*	3
15	4.128	5	4.819	4
20	9.473	6	7.580	4
25	10.786	5	12.330*	5
30	22.570**	6	8.672	4
35	18.912**	5	7.678	5
40	11.361	6	4.398	6
45	17.087*	7	5.160	6
49	18.628**	7	8.850	7

良いあてはまりを示している．尚，１％水準で棄却された二つの分布について，一つは分布幅が小さく自由度が１になったこと，他は観測分布が明らかな二山分布であること，このような理由により適合しなかったものと思われる．

若齢林分の直径分布は歪度も小さく正規分布で十分近似が可能である．しかし，高齢になり分布の歪度が大きくなるにつれ正規分布では十分な近似が得られなくなる．このような場合に，今回用いた３母数対数正規分布は有効となろう．しかも，若齢においても然るべきあてはまりの良さを示していることをも付け加えるならば，今後林分の直径分布解析にかなり有力な手段になり得ると思われる．

おわりに

本報告では，単に直径分布に対する理論分布として３母数対数正規分布を取り上げ，適合度の観点からその可能性について考察した．それ故，母数の値には特に検討を加えなかった．しかし今後はこの点についても検討を加えなければならない．また，対数正規分布は分布の再帰性という性質を持っており，例えば，直径と材積の間に相対生長法則が成り立つとすると，直径分布からただちに材積分布が推定できる．この点についても今後検討するつもりである．

引用文献

1. AITCHISON, J. & BROWN, J. A. C. : The Lognomal Distribution. Cambridge Univ. Press 176pp., 1966.
2. BLISS, C. I. & REINKER, K. A. : Forest Science **10** ; 350−360, 1964.
3. KAPTEYN, J. C. : Red. Trav. bot. neerl. **13** : 105−158, 1916.
4. MEYER, W. H. : Diameter distribution series in even aged forest stands. Yale Univ. School of Forestry Bull. **28**, 1−105, 1930.
5. SWEDA, T. & UMEMURA, T. : GROWTH OF EVEN-AGED JACK PINE STANDS, Nagoya Univ., 762pp., 1979.
6. WICKSELL, S. D. : On the genetic theory of frequency, Ark. Mat. Astr. Fys. **12** ; **20**, 1−56, 1917.

Summary

Diameter distributions of Jack pine can be discribed by the three-parameter lognormal distribution, in which the variate is $x=\log(y+y_0)$. Agreement between the observed and the expected frequencies is tested by the chi-square test. On comparing the normal and the lognormal distributions, the normal achieves a good fit to the young stands and the lognormal does to the old stands.