

減反率と直径生長の関係

第1報 新しい減反率モデルの誘導

山 本 充 男*

Mitsuo YAMAMOTO

Relation between "Gentan Probability" and "Diameter Growth"

1. Derivation of new "Gentan Probability" Models.

緒 言

1つの林分を構成する林木は、すべてが同じ状態から生長しはじめたとしても、地位、遺伝などの諸条件の違いにより、それらの大きさには当然差が生まれる。古典的な収穫規整では、この個体間の差を考慮せずただ平均的なものを論じ、伐期を定めようとしてきた。しかし、もし伐期が不適当に選択されたならば、多大の損失をまねくことになる。さらに、林木には明確な成熟期があるわけではなく、その生長過程も直線的ではないため、伐採時期に適・不適があり、それが収穫に大きく影響するのである。

林業における重要な経営指針の1つとして、多くの収穫を保続的にあげるといふことがある。従来の森林経理においては、保続の単位として、作業級が考えられてきた。そして、いわゆる保続表が作業級ごとに考えられている。しかし作業級に含まれている齢級ごとの林分を個々に考えるという見方がされてい¹⁾なかつた。鈴木は「木材の生産予測について」(1961)、同「(II)」(1963)において、林分の寿命分布を導き、新たに「減反率法」と称する収穫規整法を示した。

本研究は、林木の直径生長と減反率との関係を示し、このことから新たな林分の寿命分布を導くことを目的としている。

減反率の新しい考え方

ある時に造林された林木は、時間が進むにつれて、いろいろな直径になる。同時に林分はいろいろな齢級で伐

採され植栽されていく。前者はいわゆる「林分直径分布の遷移(林分遷移)」であり、後者は「林分齢級構成の遷移(林齢遷移)」である。これら個々の遷移の状態については、種々のモデルを用い多くの研究がなされてお³⁾⁴⁾⁵⁾り、かなりの成果をあげている。これらは共に、林業における確率過程論の応用であるが、この両者が相互にどのような関係にあるかはそれほど明確ではない。

鈴木は、林木の直径が毎年平均 M mm ずつ太って、その太さが k mm になったら伐採されるといったモデルを用いて林分の寿命の分布を与える公式 $F_k(t)$

$$F_k(t) = \frac{M (Mt)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-Mt}$$

を導びいている。そして、減反率という新しい概念を林業に導入している。

新植された林分をとって、それがちょうど j 齢級で伐採される確率を $q(j)$ で表わし、減反率と呼ぶ。よって、減反率とは、新植された林分が伐採されるまでの待ち時間として考えられる。

さて、林分が伐採されるための条件として、鈴木は、林木の太さがちょうど j 齢級で k mm になったら伐採されるといふモデルを仮定している。すなわち、直径を林分が伐採されるための基準として理解している。現在の我が国のように多数の森林所有者がそれぞれの自由意志によって、原則的には自由に伐採を行っているところでは、その基準を林分の直径に求めることは、所有者の利益、利用可能な木材の収穫等を考慮すると、比較的無難な想定ではないかと思われる。このような仮定によって、減反率とは、林木がある直径 k mm になるまでの待ち時間の分布と理解することができる。

* 森林計画学研究室

さて、図-1は林分の直径遷移を直径と時間の両軸上に三次元に模式的に表わしたものである。ここで、これがある一定な時刻において切った曲線は、その時刻における林分の直径分布を表わしていることになる。一方、ある一定な直径で切った曲線は、同じ林分がある直径になるまでの待ち時間の分布、すなわち減反率の分布曲線であることがその定義から理解される。このように、林分遷移と林齢遷移は1つの林分の直径遷移より、それぞれ時間軸、直径軸を定めることによって知ることができるのである。

純出生過程としての直径生長

直径を k で表わし、離散量 ($k=0, 1, 2, \dots$) とす

る。年齢を t で表わし、連続量 ($t \geq 0$) とする。年齢 ($t, t+dt$) の間に直径 k のものが $k+1$ 以上に太る確率を $p_k(t)dt+0(dt)$ とする。 $0(dt)$ は $k+2$ 以上に太る確率であり、その大きさは dt より小さいオーダーである。

ここで、 $f_k(t)$ を年齢 t において直径 k のものが存在する確率であるとすると、

$$f_k(t+dt) = \{1 - p_k(t)dt\} f_k(t) + p_{k-1}(t)dt f_{k-1}(t) + 0(dt)$$

$$\therefore \frac{f_k(t+dt) - f_k(t)}{dt} = -p_k(t) f_k(t)$$

$$+ p_{k-1}(t) f_{k-1}(t) + \frac{0(dt)}{dt}$$

$dt \rightarrow 0$ とすれば、

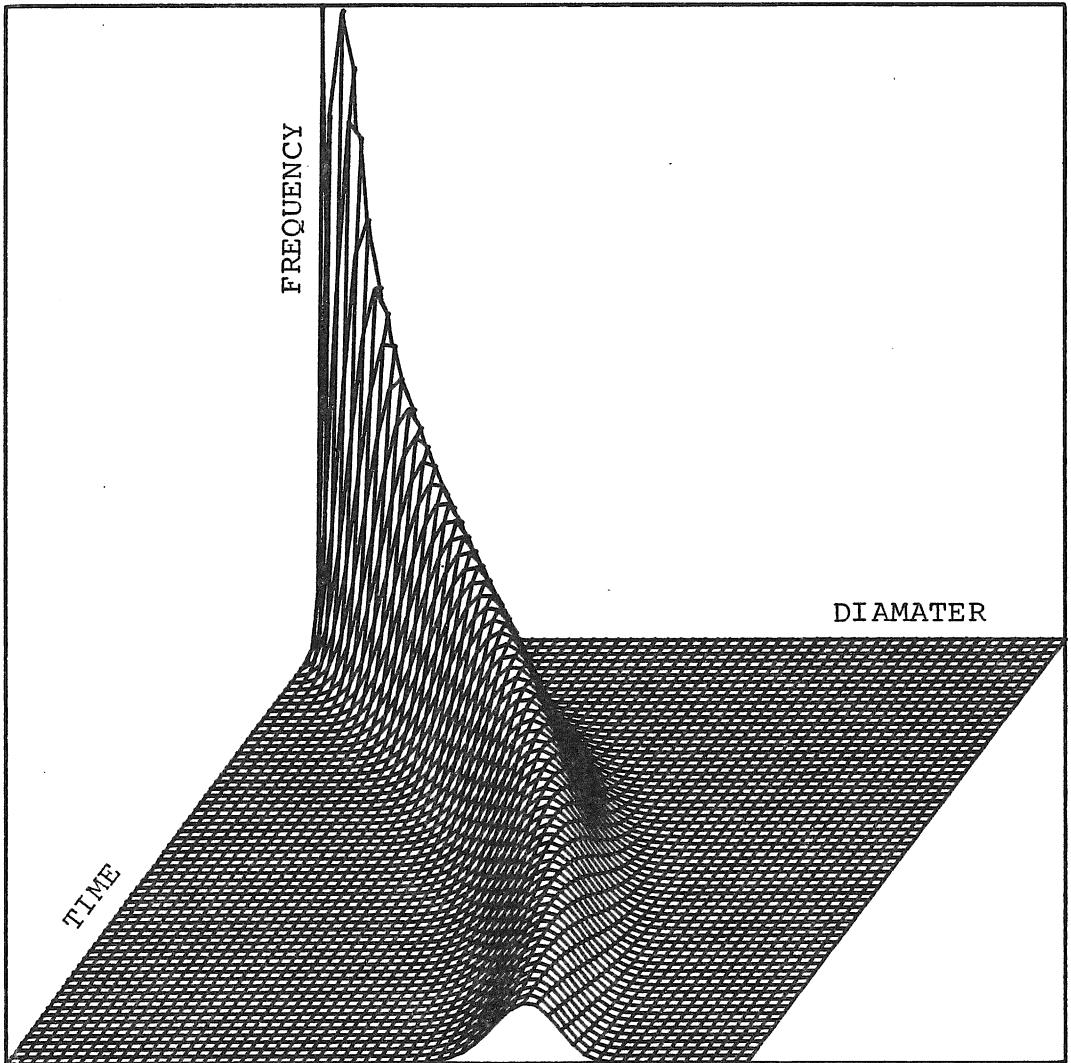


Fig. 1 The model of diameter growth

$$f'_k(t) = -p_k(t) f_k(t) + p_{k-1}(t) f_{k-1}(t) \quad (k=1, 2, \dots)$$

ととなる。初期条件を

$$f_0(0)=1, f_k(0)=0 \quad (k=1, 2, \dots)$$

とすれば、 $k=0$ のとき第2項がなくなり、

$$f'_0(t) = -p_0(t) f_0(t)$$

となる。これが直径分布 $f_k(t)$ を決める方程式である。この方程式は $p_k(t)$ を与えれば、 $k=0, 1, 2, \dots$ と順次解いていくことができる。

$f_k(t)$ は年齢 t までに直径 k 以上になる確率である。次に $(t, t+dt)$ 時間以内に直径がちょうど k になる確率 $F_k(t)$ を求める。太り方を排反な2つの場合に分けて、

(1) $(0, t)$ に $k-1$ になっていて、 $(t, t+dt)$ に k になる場合。

(2) x を2より大きな任意の値として、 $(0, t)$ に $k-x$ になっていて、 $(t, t+dt)$ に k になる場合。

とすると、(1)の場合の確率は、

$$f_{k-1}(t) \{p_{k-1}(t)dt + 0(dt)\}$$

に等しく、また(2)の場合の確率は、

$$\sum_x f_{k-x}(t) \{p_{k-x}(t) + 0(dt)\}^x$$

となり、後の値は dt が限りなく小さくときには、無視することができるから、

$$F_k(t) = f_{k-1}(t)p_{k-1}(t)$$

となる。

$P_k(t)$ の3つの型

$p_k(t)$ は年齢 t における直径 k の生長率を表わしていると考えられる。直径の生長現象は Mitscherlich 式になることが知られている。よって $p_k(t)$ について次の3つの場合について考察する。

- (1) 平均生長率 $p_k(t) = M$
- (2) 時間のみの関数 $p_k(t) = Nce^{-ct}$
- (3) 直径のみの関数 $p_k(t) = c(N-k)$

Case I. $p_k(t) = M$

生長率 $p_k(t)$ は年齢、直径に無関係で一定である。この場合、 $f_k(t)$ の方程式は、

$$f'_k(t) = -Mf_k(t) + Mf_{k-1}(t) \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$f'_0(t) = -Mf_0(t)$$

$$f_0(0)=1, f_k(0)=0 \quad (k=1, 2, \dots)$$

となる。これを解くと、

$$f_k(t) = \frac{(Mt)^k}{k!} e^{-Mt}$$

$$F_k(t) = \frac{M(Mt)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-Mt}$$

となる。 $F_k(t)$ は Γ -分布であって、その平均値 $E(t)$ 、

および分散 $Var(t)$ は、

$$E(t) = \frac{k}{M}, \quad Var(t) = \frac{k}{M^2}$$

となる。以上、Case I. については、すでに多数の報告がある。

Case II. $p_k(t) = Nce^{-ct}$

$p_k(t)$ に時間のみの関数として Mitscherlich 式

$$\frac{dy}{dt} = Nce^{-ct} \quad (y: \text{直径})$$

を代入する。このとき、 $f_k(t)$ の方程式は、

$$f'_k(t) = -Nce^{-ct}f_k(t) + Nce^{-ct}f_{k-1}(t) \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$f'_0(t) = -Nce^{-ct}f_0(t)$$

$$f_0(0)=1, f_k(0)=0 \quad (k=1, 2, \dots)$$

となる。その解は、

$$f_k(t) = \frac{1}{k!} \{N(1-e^{-ct})\}^k \exp[-N(1-e^{-ct})]$$

$$F_k(t) = \frac{\{N(1-e^{-ct})\}^{k-1}}{(k-1)!} \exp[-N(1-e^{-ct})] Nce^{-ct}$$

となる。

次に、 $F_k(t)$ の平均値、分散についてであるが²、 t に関する平均値、分散は非常に複雑な形になる。単にこの分布の特性を知るには複雑な式を求める必要はない。ここでは $1-e^{-ct}$ に関する平均値 $E(1-e^{-ct})$ および分散 $Var(1-e^{-ct})$ を求める。

$$E(1-e^{-ct}) = \int_0^\infty (1-e^{-ct}) F_k(t) dt$$

ここで、 $x = N(1-e^{-ct})$ とおくと、

$$\begin{aligned} E(1-e^{-ct}) &= \int_0^N \frac{x}{N} \frac{1}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-x} dx \\ &= \int_0^N \frac{x^k}{(k-1)! N} e^{-x} dx = \frac{k}{N} \frac{\Gamma(k+1, N)}{\Gamma(k+1)} \\ &= \frac{k}{N} I_N(k+1) \end{aligned}$$

となる。ここで $I_N(k+1)$ は不完全ガンマ関数比 (Incomplete Gamma Function Ratio) である。

同様にして、

$$\begin{aligned} E\{(1-e^{-ct})^2\} &= \int_0^\infty (1-e^{-ct})^2 F_k(t) dt \\ &= \int_0^N \frac{x^{k+1}}{N^2 (k-1)!} e^{-x} dx = \frac{(k+1)k}{N^2} \frac{\Gamma(k+2, N)}{\Gamma(k+2)} \\ &= \frac{(k+1)k}{N^2} I_N(k+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore Var(1-e^{-ct}) &= E\{(1-e^{-ct})^2\} - \{E(1-e^{-ct})\}^2 \\ &= \frac{k(k+1)}{N^2} I_N(k+2) - \frac{k^2}{N^2} \{I_N(k+1)\}^2 \end{aligned}$$

となる。

Case III. $p_k(t) = c(N-k)$

$p_k(t)$ は直径のみの関数で表わし、Mitscherlich 式

Table 1. Three Types of $p_k(t)$ and $F_k(t)$

	$p_k(t)$	$F_k(t)$ (Expectation, Variance)
Case I	M	$\frac{M(Mt)^{k-1}}{(k-1)!} \exp[-Mt], E(t) = \frac{k}{M}, Var(t) = \frac{k}{M^2}$
Case II	Nce^{-ct}	$\frac{N(1-e^{-ct})^{k-1}}{(k-1)!} \exp[-N(1-e^{-ct})]Nce^{-ct}$ $E(1-e^{-ct}) = \frac{k}{N} I_N(k+1)$ $Var(1-e^{-ct}) = \frac{k(k+1)}{N^2} I_N(k+2) - \frac{k^2}{N^2} [I_N(k+1)]^2$
Case III	$c(N-k)$	$\frac{N!c}{(k-1)!(N-k)!} (e^{-ct})^{N-k+1}(1-e^{-ct})^{k-1}$ $E(e^{-ct}) = \frac{N-k+1}{N+1}, Var(e^{-ct}) = \frac{k(N-k+1)}{(N+1)^2(N+2)}$

$$\frac{dy}{dt} = c(N-y)$$

(y : 直径)

$$\therefore Var(e^{-ct}) = E(e^{-2ct}) - \{E(e^{-ct})\}^2 = \frac{k(N-k+1)}{(N+1)^2(N+2)}$$

を用いる。 $f_k(t)$ の方程式は、

$$f'_k(t) = -c(N-k)f_k(t) + c(N-k+1)f_{k-1}(t) \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$f'_0(t) = -cNf_0(t)$$

$$f_0(0) = 1, f_k(0) = 0 \quad (k=1, 2, \dots)$$

となり、これを解くと、

$$f_k(t) = \binom{N}{k} (e^{-ct})^{N-k} (1-e^{-ct})^k$$

$$F_k(t) = \frac{N!c}{(k-1)!(N-k)!} (e^{-ct})^{N-k+1} (1-e^{-ct})^{k-1}$$

となる。

$F_k(t)$ の平均値、分散は Case II. と同様の理由で、この場合は e^{-ct} に関する平均値 $E(e^{-ct})$ および分散 $Var(e^{-ct})$ を求めることにする。

$$E(e^{-ct}) = \int_0^\infty e^{-ct} F_k(t) dt$$

ここで、 $x = e^{-ct}$ とおくと、

$$\begin{aligned} E(e^{-ct}) &= \int_1^0 -\frac{N!}{(k-1)!(N-k)!} x^{N-k+1} (1-x)^{k-1} dx \\ &= \frac{N-k+1}{N+1} \frac{\Gamma(N+2)}{\Gamma(k)\Gamma(N-k+2)} B(N-k+2, k) \\ &= \frac{N-k+1}{N+1} \end{aligned}$$

となる。

同様にして、

$$\begin{aligned} E(e^{-2ct}) &= \int_0^\infty e^{-2ct} F_k(t) dt = \int_0^1 \frac{N!}{(k-1)!(N-k)!} x^{N-k+2} (1-x)^{k-1} dx \\ &= \frac{(N-k+2)(N-k+1)}{(N+2)(N+1)} \frac{\Gamma(N+3)}{\Gamma(k)\Gamma(N-k+3)} B(N-k+3, k) \\ &= \frac{(N-k+2)(N-h+1)}{(N+2)(N+1)} \end{aligned}$$

となる。

以上、3種の場合についての結果をまとめると表-1 のようになる。

このようにして、従来の減反率モデルに、減反率を直径生長の関係から新たに2種のモデルを誘導することができた。これら2種のモデルの平均値、分散以外の特性および従来のモデルとの比較、さらには具体的にどのような減反率や式中に現われるパラメータを決定するかについて、今後検討を加えていかなければならない。

ま と め

林分が植栽されてから伐採されるまでの待ち時間という減反率の概念に、新たに林木がある直径になるまでの待ち時間という考え方をつけ加え、鈴木の減反率モデルに直径生長より演繹された2種のモデルを加えた。

これら各種の減反率モデルは、ともに確率過程における混合型マルコフ過程の応用である。すなわち、時間は連続的、状態は離散的にあつたものである。本論では、混合マルコフ過程の中でも最も単純な純出生過程、すなわち、系が時間間隔 ($t, t+dt$) において、そのまま元の状態にとどまっているか、あるいはその間に移動するとすれば、1径級上の状態にしか移動できないとする過程である。しかし、この最も単純な過程の応用ではあるが、ある程度明確に、直径生長と減反率との関係が把握されたように思われる。

引 用 文 献

1. 鈴木太七：木材の生産予測について 科学技術庁資源局 113pp., 1961
2. 鈴木太七：木材の生産予測について (II) 科学技

- 術庁資源局 54pp., 1963
3. 梅村武夫：名古屋大農演習林報告 6 : 1 - 75, 1976
4. 竹内公男・箕輪光博：日林講 84 : 73-74, 1973
5. SWEDA, T. : EVEN-AGED FOREST GROWTH AFTER FIRE : A MATHEMATICAL MODEL (Master's thesis), New Brunwic Univ., Canada, 177pp., 1972
6. 鈴木太七：日林誌 54 : 234-243, 1972
7. 鈴木太七：林地肥培効果の評価に関する報告書 林野庁 86-109, 1961

Summary

1. "Gentan probability" $q(j)$ is the probability that a initial forest will be reserved till j age-class and will be cut in the same j age-class. The probability $q(j)$ is the life span distribution of forest stands in a district. In almost all countries, at present, each individual owner of forests is treating his forests of his own will. So $q(j)$ is considered as a kind of waiting time up to the first replacement. Now we assume that a forest stand will be harvested when the mean diameter is k mm wide. $q(j)$ is considered as the probability that the tree becomes k mm across at j age-class. And it imparts a new meaning to $q(j)$, as a waiting time untill the tree becomes k mm across. Therefore, we can interpret "diameter growth" and "Gentan probability" in the same model, such as Fig. 1.

2. Applying the Markov Chain theories, the auther derived two formulas which give the life span distribution of forest stands as well as Suzuki's one*.

$$* F_k(t) = \frac{M(Mt)^{k-1}}{(k-1)!} \exp[-Mt]$$

$$F_k(t) = \frac{N(1-e^{-ct})^{k-1}}{(k-1)!} \exp[-N(1-e^{-ct})] Nce^{-ct}$$

$$F_k(t) = \frac{N!c}{(k-1)!(N-k)!} (e^{-ct})^{N-k+1} (1-e^{-ct})^{k-1}$$