

# 非定常マルコフモデルによる河川流量シミュレーション

竹山 光一<sup>※</sup>・田中 礼次郎<sup>※</sup>

Kouichi TAKEYAMA and Reijiro TANAKA  
Stochastic Simulation of River Flow  
by Nonstationary Markov-Chain Model

## 1 ま え が き

近年広域の水資源開発が、大きな社会的要請となってきたが、このような計画に際して、長期の河川流量資料が必要となる。しかし、地域によっては、短期間の観測資料しか得られないため、これから研期間の水文データを推定せざるを得ない場合がしばしばある。このようなとき、観測資料の統計的特性を調べて、これを数学的に合成し再現する、いわゆる確率的シミュレーション法による、長期の水文資料の整備が有用である。

ここでは、兵庫県の加古川水系の、国包地点（流域面積 1648.3km<sup>2</sup>）と、吞吐地点（流域面積 49.8km<sup>2</sup>）などについて、1918年～1969年の52年間の流量資料（これは雨量資料をもとに、タンクモデル法で発生したもの）を対象として取り上げ、利水計画にしばしば用いられる、5日平均流量（m<sup>3</sup>/sec/5 days）の特性を解析し、これに基づいた具体的シミュレーションモデルを提案し、100年間の流量を模擬発生し、その適合性について検討を試みた

## 2 非定常マルコフモデル

### 2-1 時系列解析とシミュレーションモデル

河川の5日間、10日間、……30日間等の平均流量の時系列変動、 $Q_t$ ； $t = 1, 2, \dots, N$  は、一般に各月によって、平均値・分散値の異なる非定常な時系列と考えら

$$R_j = \frac{\sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i=1}^6 (Q_{i,k,j} - \bar{Q}_{X,j})(Q_{i+1,k,j} - \bar{Q}_{Y,j}) \right\}}{\sqrt{\sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i=1}^6 (Q_{i,k,j} - \bar{Q}_{X,j})^2 \right\} \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i=1}^6 (Q_{i+1,k,j} - \bar{Q}_{Y,j})^2 \right\}}} \quad (2)$$

ただし

$$Q_t = Q_{i,k,j} \left\{ \begin{array}{l} i = \text{mod}(t-1, 6) + 1 \\ k = t/72 + 1 \\ j = \{\text{mod}(t, 72) - 1\} / 6 + 1 \end{array} \right.$$

れる。しかし、長期間にわたる一連の時系列変動としてみると、次の系列相関係数を用いて、年周期などの周期成分や、持続性を解明することができる。<sup>1)</sup>

系列相関係数；

$$r_k = \frac{1}{S_1 S_2} \left\{ \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} (Q_i - \bar{Q}_1)(Q_{i+k} - \bar{Q}_2) \right\} \quad (1)$$

ただし、

$$\bar{Q}_1 = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} Q_i,$$

$$\bar{Q}_2 = \frac{1}{N-k} \sum_{i=k+1}^N Q_i$$

$$S_1^2 = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} (Q_i - \bar{Q}_1)^2,$$

$$S_2^2 = \frac{1}{N-k} \sum_{i=k+1}^N (Q_i - \bar{Q}_2)^2$$

ここで  $m$  年間の5日平均流量の時系列、 $Q_t$ 、 $t = 1, 2, \dots, N$  ( $N = 72m$ ) について、 $j$  月 ( $j = 1, 2, \dots, 12$ ) ごとに、 $Q_t$  と  $Q_{t+1}$  との相関係数  $R_j$  を(2)式で求めると、表1のように、いずれもかなりの相関を示すことがわかる。

$\bar{Q}_{X,j}$ ； $m$  年間の、 $j$  月の5日平均流量総平均値

$\bar{Q}_{Y,j}$ ； $m$  年間の、 $j$  月の第2～ $j+1$ 月の第1番目の5日平均流量の総平均値

この結果、 $Q_t$ 、 $Q_{t+1}$  は、マルコフ連鎖の特性を有

※ 農業水利工学研究室

表1 観測流量相関係数

月	国 包			吞 吐		
	$\bar{Q}_x$	$\bar{Q}_y$	R	$\bar{Q}_x$	$\bar{Q}_y$	R
1	19.38	19.88	0.508	0.598	0.621	0.572
2	24.90	26.42	0.603	0.779	0.824	0.601
3	36.29	37.69	0.468	1.158	1.202	0.459
4	41.64	42.96	0.430	1.379	1.453	0.407
5	40.46	39.29	0.393	1.334	1.266	0.434
6	57.46	68.28	0.407	1.949	2.364	0.404
7	57.44	45.44	0.452	1.837	1.367	0.468
8	32.43	33.59	0.241	0.965	1.000	0.284
9	67.96	70.32	0.457	1.980	2.087	0.464
10	45.40	41.62	0.333	1.469	1.352	0.363
11	26.98	25.10	0.506	0.954	0.880	0.436
12	19.24	19.00	0.516	0.617	0.603	0.531

( $\bar{Q}_x, \bar{Q}_y$ ; m<sup>3</sup>/sec/5 days)

し、(3)式<sup>2)</sup>の非定常マルコフモデルが決定すると、図1のように、この直線とその周辺に流量  $Q_{t+1,j}$  が分散していることが確かめられる。(  $\varepsilon_{t+1,j}$  は、 $Q_{t+1}$  のランダム項)

$$Q_{t+1,j} = \bar{Q}_{y,j} + A_j * (Q_{t,j} - \bar{Q}_{x,j}) + \varepsilon_{t+1,j} \quad (3)$$

$Q_{1,1} = Q_{x,1}$  とする。

2-2 偏差の対数正規化

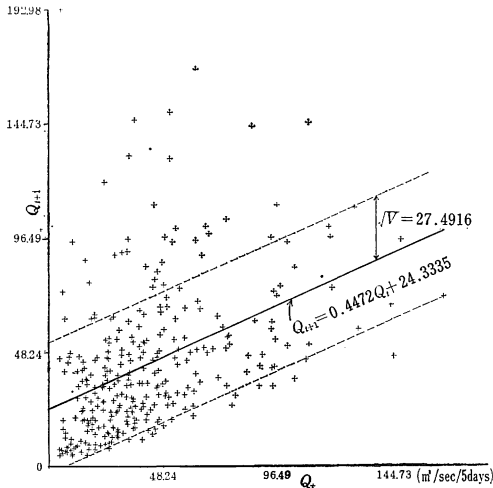


図1 観測流量散布図 (国包地点; 4月)

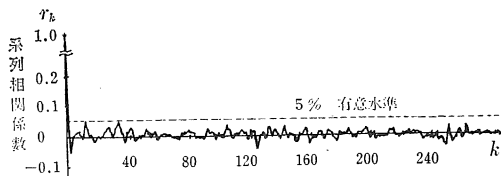


図2 偏差のコレログラム (国包5日平均流量)

(3)式の  $\varepsilon_{t,j}$  の時系列は(1)式を用いると、図2のようにランダム性が明らかとなる。また、各月ごとに分布を調べると、表2、図3のように右にひずんだ形状をしていることがわかるので、これを(4)式を用いて、 $x_{t,j}$  に変換し、岩井法により対数正規化することを試みた。

$$x_{t,j} = \varepsilon_{t,j} + |\min(\varepsilon_{t,j})| + B_j \quad (4)$$

$$B_j = k * |\max(\varepsilon_{t,j}) - \min(\varepsilon_{t,j})| / z$$

$$(k = 1, 2, \dots, 2z; z = 40; t = 1, 2, \dots, 6m)$$

岩井法<sup>3)</sup>は  $x_{t,j}$  を各月ごとの順序統計量  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{6m}$  に並び、超過確率  $W$  の継続曲線の中央値を  $x_0$  としたとき、これに関し  $W$  軸上で左右対称になる一対の変数  $x_s$  および  $x_t$  を選び、これらに対応する媒介変数を  $y_s$  および  $y_t$  とすると、 $x_s$  および  $x_t$  は  $x_0$  について左右対称であるから、その一つに対する超過確率  $W$  と、他の一つに対する非超過確率  $F$  は相等しい。すなわち、

$$W(x_s) = F(x_t)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y_s} e^{-y^2} dy \right\}$$

表2 観測流量の偏差の分布

月	国 包		吞 吐	
	平均値	標準偏差	平均値	標準偏差
1	0.000	12.78	0.000	0.446
2	0.000	18.34	0.000	0.616
3	0.000	24.13	0.000	0.854
4	0.000	27.54	0.000	1.000
5	0.000	37.88	0.000	1.208
6	0.001	74.15	0.000	2.879
7	0.000	55.25	0.000	1.742
8	0.001	46.50	0.000	1.673
9	0.001	76.23	0.000	2.443
10	0.001	48.31	0.000	1.557
11	0.000	17.07	0.000	0.663
12	0.000	11.71	0.000	0.425

(単位 m<sup>3</sup>/sec/5 days)

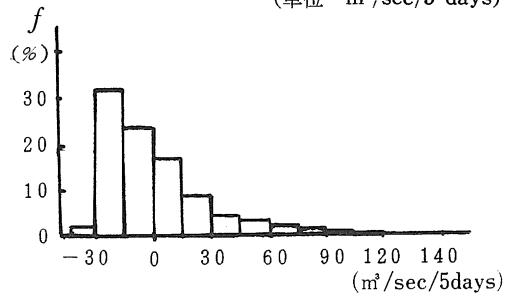


図3 偏差のヒストグラム (国包地点: 4月)

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y_t} e^{-y^2} dy \right\}$$

$$\therefore \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y_s} e^{-y^2} dy = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y_t} e^{-y^2} dy,$$

$$\therefore y_s = -y_t$$

$$\text{すなわち } y_s = a \log_{10} \{(x_s + b)/(x_0 + b)\}$$

$$y_t = a \log_{10} \{(x_t + b)/(x_0 + b)\} \text{ とすると}$$

よって,  $(x_0 + b)^2 = (x_s + b)(x_t + b)$

$$\therefore b_s = (x_s x_t - x_0^2) / (2x_0 - (x_s + x_t))$$

$$b = \sum_{i=1}^T b_s / T, \quad (T=6m/2) \quad (5)$$

ここでは, 分布の全般的な適合性をよくするため, 岩井法を用いる場合に,  $T$  のとり方を, 上記のように工夫し, 下限値  $b$  を用いて分布曲線を標本値に近づけようとしている. ここで  $x$  の非超過確率  $F$  が与えられたとき, (6)式から  $y$  を決定し, (7), (8)式より  $x$  が求まる.

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-y^2} dy \quad (6)$$

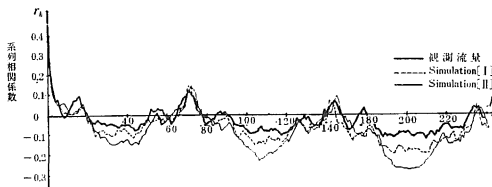


図4 5日平均流量時系列のコレログラム (国包地点)

$$y = a \log_{10} \frac{x+b}{x_0+b} \quad (7)$$

$X_i \equiv \log_{10}(x_i + b)$  とすると

$$\frac{1}{a} = \sqrt{\frac{2M}{M-1}} S_X, \quad S_X = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i^2 - \bar{X}_0^2} \quad (8)$$

ただし,  $\bar{X}_0 \equiv \log_{10}(x_0 + b)$ , ( $M = 6m$ )

ここで, (6)の誤差関数と正規分布関数には, (9)式の関係があるから<sup>4)</sup>, 正規分布の上側確率を  $RY$  とすると(10)式を得る.

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-t^2} dt = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{2}y} e^{-t^2/2} dt - 1 \quad (9)$$

表3 Simulation 流量の相関係数 (国包)

月	相 関 係 数		回帰線からの標準偏差	
	I	II	I	II
1	0.408	0.384	13.37	13.04
2	0.640	0.629	16.50	16.32
3	0.440	0.432	26.78	26.55
4	0.427	0.425	26.57	26.53
5	0.371	0.347	30.14	29.17
6	0.412	0.338	64.48	60.47
7	0.461	0.419	39.72	37.95
8	0.172	0.157	43.07	41.29
9	0.387	0.355	59.83	57.27
10	0.270	0.217	39.17	37.06
11	0.579	0.568	15.64	15.32
12	0.573	0.561	10.61	10.48

(単位  $m^3/sec/5 \text{ days}$ )

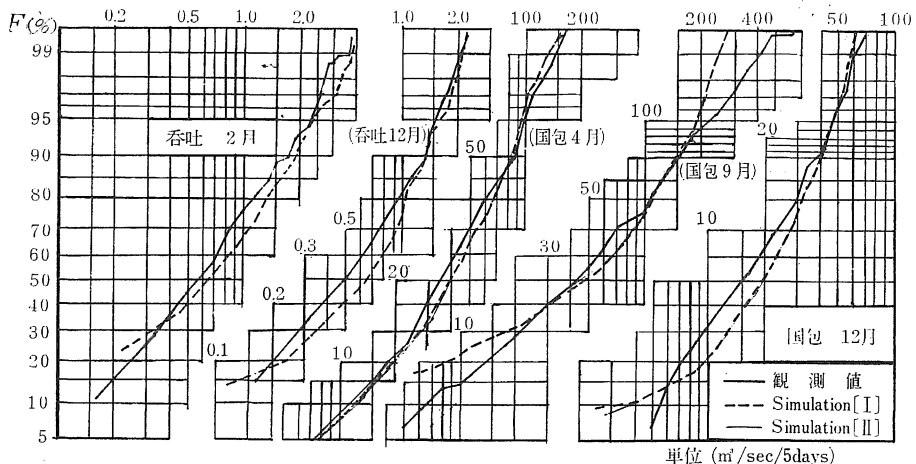


図5 5日平均流量非超過確率

$$\therefore W(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_y^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2y}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = RY \quad (10)$$

ここで上側確率  $RY$  ( $0 < RY \leq 0.5$ ) と、標準正規変量  $U$  につぎの近似式が成立するから<sup>5)</sup>

$$RY = \int_u^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{とすると}$$

$$U(RY) \doteq z - \frac{a_0 + a_1 z}{1 + b_1 z + b_2 z^2} \quad (11)$$

$$z = \sqrt{\ln(1/RY^2)}$$

$$a_0 = 2.30753$$

$$a_1 = 0.27061$$

$$b_1 = 0.99229$$

$$b_2 = 0.04481$$

したがって電子計算機の中で、一様乱数  $RY$  を発生し ( $RY > 0.5$  のとき、 $1 - RY = RY$  とし、 $-U = U$  とする) (10), (11)式より  $y$  を求め、(4), (7), (8)式より各月ごとの偏差  $\varepsilon_t$  を模擬発生し、これを(3)式に代入して流量の一連の模擬発生を行なうことができる。

この数学モデルは、(4)式の第2、第3項が増大するにしたいが、 $x_t$  の分布を漸次正規分布に近似するので第3項を順次増大させながら、(5)式より求めた  $b$  との和を下限值として、模擬発生される  $\varepsilon_t$  の分布が、観測流量の  $\varepsilon_t$  の分布と、平均値・分散値・ヒストグラムの形状などに統計的に有意な差が無いようにすることができる。この方法によって、これまでの半月平均流量<sup>6)</sup>、月平均流量のシミュレーションにおいて残されていた、下限値の決定のプログラム化が可能になったと考える。

### 3 結果と考察

5日平均流量の模擬発生を行なうとき、流量が負となることがある。このときの流量は、〔I〕0とする。〔II〕その絶対値とする。などの方法で修正しつつ計算をすすめた。模擬発生流量の時系列は、図4によって観測流量とよく似た持続性・周期性を有していることが確かめられる。表3は、〔I〕における相関係数が〔II〕におけるものよりやや大きくなることを示しているが、いずれの相関係数も、観測流量における相関係数と、統計的に有意な差は認められなかった。

〔I〕、〔II〕の分布は、非超過確率  $F$  が、大体5～15%以上では一致し、両者とも観測流量の分布との適合性が高い。ここで模擬発生流量の3～6%が負となることを考慮すると、〔II〕の場合、回帰直線からの分散がやや小さくなり、 $F$  値が5%以下の流量の占める割合が多少増加し、相関係数は〔I〕の場合よりやや小さくなるが、妥当な修正法と考える。模擬発生の一例は図

5、図6のようになる。

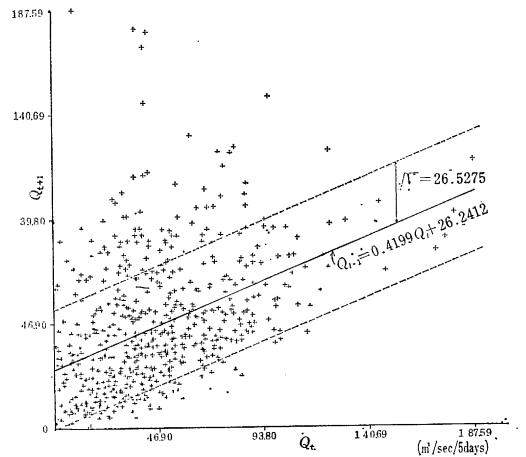


図6 Simulation 流量の散布図 (国包地点：4月)

流域面積が大きな地点での冬期(12月, 1月, 2月)の観測流量には、安定した最小値があると考えられるので、これの数学モデルへの組み入れを、今後検討すべき問題としたい。

### 4 結 び

5日平均流量の時系列変動は、各月ごとに平均値と分散値が異なる非正常な変動であるが、ここでの数学モデルはこれを単純マルコフ連鎖型の変動と、それからのランダム変動の和として定式化している。ここでランダム変動成分  $\varepsilon_t$  は、 $x_t$  が漸次正規分布に近似するように順次一定巾で増大する下限値  $B$  を与え、さらに岩井法を若干修正し、観測値の分布が全体的に対数正規分布に近づくように下限値  $b$  を決定する方法を用いて対数正規化して  $\varepsilon_t$  を模擬発生させると、観測値の  $\varepsilon_t$  ときわめて高い適合性が得られた。

したがってこの数学モデルは、この種の流量データを用いる水工計画に十分使用できる、実用的シミュレーションモデルであるといえよう。

最後に、本研究の計算を、本学計算センターの FACOM 270-20 を用いてすすめるにあたり、ご協力頂いた堀江昭彦氏に厚く感謝する次第である。

## 引用文献

1. 吉川和広・石原藤次郎：土木計画とOR，丸善，東京，1969，p.117
2. CHOW, V. T. and RAMASSECHAN, S. : Sequential Generation of Rainfall and Runoff Data Proc. ASCE, 91 HY4, 205-223, 1965.
3. 岩井重久・石黒政儀：応用水文統計学，森北出版，東京，1970，p.73~101
4. 山内二郎編：統計数値表，日本規格学会，東京，1972，p.3.
5. 同上，p.8.
6. 竹山光一・田中礼次郎：農業土木学会大会講演要旨，460-1，1974.

## Summary

The time series of the average value of 5-days flow can be represented by a nonstationary Markov-chain model with random components, month by month. The random components  $\varepsilon_t$  may be transformed into  $x_t$  ( $x_t = \varepsilon_t + B + b$ ) and its distribution can be fitted most satisfactorily to a lognormal distribution. Here,

$B$ ; a gradually increasing value with some step. The greater it is, the more normalized distribution of  $x_t$  is gained.

$b$ ; a parameter which approximates the shape of lognormal distribution to that of the observed one, by Iwai method.

Having sequentially generated the river flow by that model with Monte Carlo simulation technique for 100 years at two points, the model has been proved to be available for practical purposes.