島根大学教育学部紀要（教育科学）第12巻　29〜34頁　昭和53年12月

高校における離散確率分布の指導について

伊　藤　俊　彦*

Toshihiko ITO

On Teaching Method of the Discrete Distribution in the Upper Secondary School

1 はじめに

「現代における数学の発展と社会で果たす数学の役割を考慮して，新しい観点から内容を質的に改善し，基本的な概念が十分理解され，数学的な見方や考え方がいっそう育成されるようにする事[(1)]」という改善の基本方針により，現行の高校の学習指導要領が昭和45年に誕生した。これにより従来「確率」は「数学ⅡA」，「数学Ⅲ」，「応用数学」などで取り扱われていたものが「数学Ⅰ」で取り扱われるようになった[(2)]。「数学Ⅰ」では確率の意味と基本法則，条件つき確率，事象の独立などの確率の基本的な性質や概念を扱っておる[(3)]。これを受けて「数学Ⅲ」では確率分布と統計的推測を指導する事になっておる[(4)]。現行の小学校，中学校，高校の学習指導要領の特徴の１つは，スパイラル方式によって教材を配列しておる事である。たとえば，「確率」を例にとってみると小学校６年，中学校２年，高校１年と１年おきにその指導がくりかえされておる[(5)]。小学校，中学校，高校にわたるスパイラル方式が適当であるかどうかが今回の改訂の基本方針の１つとしてとりあげられ，昭和52年に小学校，中学校の学習指導要領が改訂され，「確率」については大きく整理され，小学校６年の「確からしさ」は中学校に移り，基礎的な概念を理解させるという事に主眼をおき，「順列・組合せの考え」との関連をなくし形式的な確率の計算に深入りする事のないよう中学校３年で指導するようになった。

このようなスパイラル方式の反省を受けて，高校の学習指導要領案が文部省から，昭和53年発表された。それによると現行の「数学Ⅰ」の内容であった「確率」は高学年の選択科目「確率・統計」で扱われる事になり，その内容については，資料の整理，場合の数，確率，確率分布，統計的な推測であり，現行の「数学Ⅰ」と「数学Ⅲ」の確率・統計の内容を合わせたものであり，現行のものとほとんど大差ない。

選択科目としての「確率・統計」とよばれる科目が誕生した以上，現行通りの内容と大差ないというのではなく，社会において役に立っておる確率・統計の内容をもっととり入れてよいのではないだろうか。離散確率分布についてみてみると二項分布しか扱っていない。実験・実習を大巾にとり入れ，平易に内容を展開すれば，二項分布以外の離散確率分布の指導も可能であると思う。そこで本報告は，高校の選択科目「確率・統計」の離散確率分布の指導に，二項分布のみではなく，幾何分布，ポアソン分布をとり入れる事を提案し，その指導展開例を示す。教育実践は筆者が高専に勤めていたときおこなったものである。

2 離散確率分布の指導法

離散確率分布の定義[(6)]　Ω を標本空間，B を Ω 上のボレル集合族とする。ボレル集合族は次の条件をみたすものである。(1) $\Omega \in B$ (2) $A \in B \Rightarrow A^c \in B$

(3) $A_i \in B \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in B$

B 上で定義された次の公理をみたす実数値関数 P_r を確率，$P_r(A)$ を事象 A の確率という。

公理１　$0 \leqq P_r(A) \leqq 1$

公理２　$P_r(\Omega)=1$

公理３　$P_r\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P_r(A_i)$

そして Ω と B と P_r を三つ組み合せたもの (Ω, B, P_r) を確率空間といい，この確率空間の根元事象 ω を実数に対応させる関数 $X(\omega)=X$ を考え，$\{\omega | a < X(\omega) < b\}$ が常に B の要素，すなわちボレル集合になっているとき，X を (Ω, B, P_r) 上で定義された確

＊　島根大学教育学部数学教育研究室

率変数といい，この X が高々可附番の値しかとらず，

$$P_r(X=x_i)=f(x_i) \qquad (i=1,\ 2,\cdots)$$

となるとき，X は離散確率分布に従うといい，$f(x_i)$ を離散密度関数という。

このとき $f(x_i)$ は 次の性質がある。

性質1　$f(x_i)\geqq 0 \quad (i=1\ ,\ 2,\cdots)$

性質2　$\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)=1$

さらに任意の1次元集合 A に対して

$P_r\{X\in A\}=\sum_{x_i\in A} f(x_i)$ が成立する。

上記で定義された離散確率分布の具体的な分布として次の例がある。

(a)　二項分布　$f(x)={}_nC_x p^x q^{n-x}$　$x=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n$

(b)　幾何分布　$f(x)=q^{x-1}p \quad x=1,\ 2,\cdots$

(c)　ポアソン分布　$f(x)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad x=0,\ 1,\ 2,\cdots$

いずれも重要な分布であり，これらの確率分布の指導法はすべて次の両極Ⓐ，Ⓑの間に位置づけられると林昭氏は述べておる。[7]

Ⓐ　コルモゴロフの公理（確率分布の定義で述べた性質1～2）を満たしておれば確率分布とみなし，理論的に指導する。

Ⓑ　分布が得られた由来もしくは現象例・実験例に基づき確率分布を構成し指導する。

Ⓐは演繹的推論を中心とした分析的思考型，Ⓑは分析的思考に先行する直観的思考型と考えられる。小学校，中学校における確率・統計の学習はⒶ的指導法は無理でⒷ的指導法が直観的思考にもとづくという点から適しておる。高校においては，大部分Ⓑ的指導法でなされるが，可能な限りⒶ的指導法を導入した方が望ましいと思う。現行の「数学Ⅰ」，「数学Ⅲ」の教科書から確率分布の指導についてみてみると，ほとんどⒷ的指導法で展開されており二項分布の期待値 $E(X)$ についてのみ次のようなやり方でややⒶ的な方法で展開しておる。[8]

$E(X)=\sum_{x=0}^{n} x\,{}_nC_x p^x(1-p)^{n-x}$ を求めるのに，

$$(q+pt)^n=\sum_{x=0}^{n}{}_nC_x p^x q^{n-x}t^x\cdots\cdots\cdots ①$$

両辺を微分して

$$n(q+pt)^{n-1}\cdot p=\sum_{x=1}^{n} x\,{}_nC_x p^x q^{n-x}t^{x-1}\cdots\cdots\cdots ②$$

①，②において

$t=1,\ p+q=1$ とおくと

$E(X)=np$

そこで，次に実際の指導展開について考察する。

3　離散確率分布の指導展開

本稿の展開に入る前に次の指導はおこなわれているものとする。(ア)確率の意味　(イ)確率の基本的な法則　(ウ)条件つき確率・事象の独立　(エ)確率分布の意味　(オ)確率分布の平均，分散　(カ)二項分布と大数の法則

3.1　幾何分布

Ⓑ⟶Ⓐへの指導展開を試みる。

実験1　「乱数サイをくりかえして振るとき，x 回目に初めて1の目の出る確率を求めよ。又1の目が初めてあらわれるのは平均して何回目か。」

たとえば5回目に1の目が初めてあらわれたときは，4回目までは1の目が出ないから その 確率は$\left(\dfrac{9}{10}\right)^4$，

次に1の目が出る確率は$\dfrac{1}{10}$から，

$$P_r(X=5)=\left(\frac{9}{10}\right)^4\left(\frac{1}{10}\right)\text{となる。}$$

同様にして x 回 目に初めて1の目の出る確率は

$$P_r(X=x)=f(x)=\left(\frac{9}{10}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{10}\right)\text{となる。}$$

上記の $f(x)$ は次の性質をみたす。

性質1　$f(x)\geqq 0$

性質2

$$\frac{1}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{9}{10}\right)^2\left(\frac{1}{10}\right)+\cdots\cdots\cdots+\left(\frac{9}{10}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{10}\right)+\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{9}{10}}=1$$

よって $f(x)$ は確率密度関数となる。一般に1回の試行で事象 A のおこる確率を p とし，試行を何回かくりかえして x 回目に初めて A のおこる確率が $P_r(X=x)=f(x)=q^{x-1}p$ となるときこの確率分布を幾何分布という。

実験1の順序は次のとおりである。

① 乱数サイを投げ，初めて1の目が出た回数を記録する

② ①の操作を5回くりかえして，5回の平均 $\bar{x}$ を求める

③ ①～②を40回くりかえし 累積平均 $\bar{\bar{x}}$ を求める。

このようにして得られたものが表1である。（40人の生徒のうち1人の生徒のおこなった結果である。）

表1より度数分布を作り，理論的な確率分布と比較したものが表2である。

X の理論的な期待値 $E(X)$ は

表1　初めて1の目が出た回数

No.	x					$\bar{x}$	$\bar{\bar{x}}$	No.	x					$\bar{x}$	$\bar{\bar{x}}$
1	7	21	2	15	19	12.8	12.8	21	2	9	5	2	1	3.8	10.6
2	2	20	15	6	3	9.2	11.0	22	3	7	6	6	17	7.8	10.5
3	10	2	2	1	14	5.8	9.26	23	18	2	4	7	19	10.0	10.4
4	18	32	13	6	5	14.8	10.6	24	5	10	8	4	9	7.2	10.3
5	12	10	9	40	1	14.4	11.4	25	1	22	1	10	4	7.6	10.2
6	38	12	2	11	8	14.2	11.8	26	7	1	2	2	5	3.4	9.9
7	9	12	6	22	7	11.2	11.7	27	29	11	17	16	13	17.2	10.2
8	2	5	1	4	8	4.0	10.8	28	10	9	27	3	7	11.2	10.2
9	8	17	6	16	2	9.8	10.6	29	19	18	7	5	8	11.4	10.3
10	9	3	1	9	8	6.0	10.2	30	5	22	10	11	1	9.8	10.3
11	11	7	13	33	19	16.6	10.8	31	8	2	8	4	3	5.0	10.1
12	6	7	8	4	21	9.2	10.6	32	2	15	1	7	8	6.6	10.0
13	16	36	3	3	13	14.2	10.9	33	15	4	4	3	2	5.6	9.9
14	4	5	2	3	8	4.4	10.4	34	1	2	8	9	5	5.0	9.7
15	2	3	6	2	45	11.6	10.5	35	6	35	4	32	7	16.8	9.9
16	10	19	1	11	33	14.8	10.8	36	8	4	3	8	2	5.0	9.8
17	2	1	11	7	18	7.8	10.6	37	3	4	8	21	14	10.0	9.8
18	7	13	24	17	9	14.0	10.8	38	7	9	18	2	7	8.6	9.8
19	4	3	1	10	2	4.0	10.4	39	28	36	1	14	23	20.4	10.0
20	26	24	10	27	18	21.0	10.9	40	18	24	4	3	30	15.8	10.2

（注）x は初めて1の目が出た回数，$\bar{x}$ は5個ずつの平均，$\bar{\bar{x}}$ は累積平均，試回回数200回

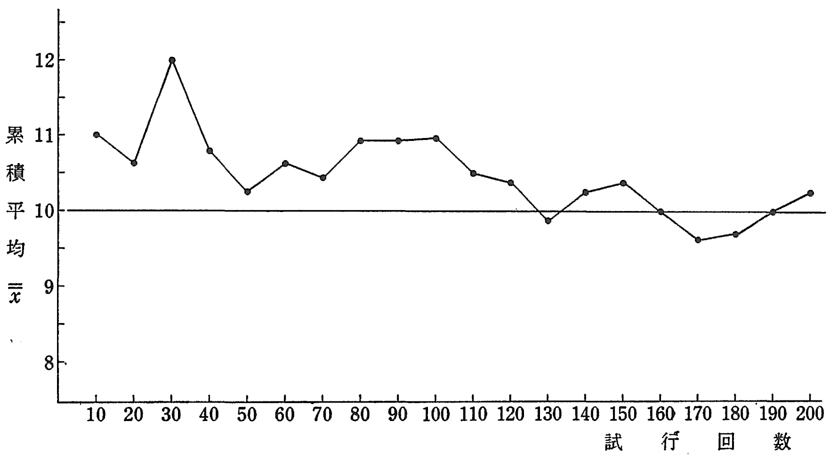

図1　累積平均の推移

表2 相対度数分布表と確率分布表

x	度　数	相対度数	理論確率
1～4	67	0.335	0.343
5～8	47	0.235	0.224
9～12	28	0.140	0.146
13～16	15	0.075	0.095
17～20	17	0.085	0.062
21～24	10	0.050	0.040
25～28	4	0.020	0.025
29～32	4	0.020	0.016
33～36	5	0.025	0.010
37～40	2	0.010	0.006
41～	1	0.005	0.033

(注) x は初めて1の目の出た回数

$$E(X)=\sum_{x=1}^{\infty}xq^{x-1}p=p\sum_{x=1}^{\infty}xq^{x-1}=p\cdot\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}=10$$

であり，標本平均 $\bar{\bar{x}}$ は表1より $\bar{\bar{x}}=10.2$ であり，かなりよく近似しておる。

表2から，相対度数分布は理論的な確率分布にかなりよく近似しておる。

以上の事より，実験における分布は幾何分布に従う事が理解できる。

「ある事象 A についてそれがおこる確率を p とすると，試行回数 n を十分大きくすれば，A のおこる相対度数は p に近い値になる」[9] という大数の法則は表2から直観的に理解できる。

この大数の法則を正確に述べると次のとおりである。[10]

大数の法則 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ が同一の分布に従う独立な確率変数であるとき，その最初の n 個の平均 $\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ について考える。ここで $E(X_i)=m$ とする。$\bar{X}_n$ の m のまわりのバラツキは n が増加すればしだいに小さくなる。すなわち任意の正数 ε に対して，

$$\lim_{n\to\infty}P_r\{|\bar{X}_n-m|>\varepsilon\}=0 \text{ となる。}$$

図1は，累積平均の推移を示しておる。試行回数が増加するにつれて，累積平均はだんだんと理論的期待値10に近づいていく事がわかる。試行回数5回の平均は多種多様であるが200回の回数で累積平均がだんだんと安定していく事が図1よりわかり，正確な意味での大数の法則が直観的に理解できる。

3.2 ポアソン分布

ポアソン分布の指導法をⒶ──→Ⓑの順に並べてみると次のとおりである。

① 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$ $x=0, 1, 2, \cdots$ で与えられるとき X はポアソン分布をなすという。[11]

(証) $f(x)\geqq 0$ は明白。$\sum_{x=0}^{\infty}f(x)=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}=$

$$e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1$$

よって $f(x)$ は確率密度関数になる。

② 二項分布のポアソン近似

二項分布 $f(x)={}_nC_xp^xq^{n-x}$ において $np=\lambda$ を一定に保ちながら，$n\to\infty$，$p\to 0$ とするときポアソン分布に近づく。[12]

(証) ${}_nC_xp^xq^{n-x}=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-x+1)}{x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}=\frac{\lambda^x}{x!}\ \frac{n}{n}\ \frac{n-1}{n}\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{n-x+1}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$n\to\infty$ のとき

$$\frac{n-x+1}{n}\longrightarrow 1,\quad \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\longrightarrow e^{-\lambda},$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}\longrightarrow 1$$

結局 ${}_nC_xp^xq^{n-x}\longrightarrow\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$

③ 確率過程 $s(t)$ からポアソン分布を導く。[13]

$s(t)$ に次の仮定をおく。

(a) 任意の $t, h>0$ に対して $s(t)$ と $s(t+h)-s(t)$ は確率的に独立な確率変数である。

(b) 確率変数 $s(t+h)-s(t)$ の分布は t に関係ない。

(c) $P_r\{s(t+h)-s(t)=1\}=\lambda h+0(h)$

$P_r\{s(t+h)-s(t)\geqq 2\}=0(h)$

ここで $0(h)$ は $0(h)/h\to 0$ $(h\to 0)$ なる h の関数を表わす。

この仮定(a), (b), (c)を用いて，$t>0$, $x=0, 1, 2, \cdots$ に対して，$P_x(t)=P_r\{s(t)=x\}$ を決定する。

上記の仮定より $\frac{d}{dt}P_0(t)=-\lambda P_0(t)$ をといて，$P_0(t)=e^{-\lambda t}$。$\frac{d}{dt}P_x(t)=-\lambda P_x(t)+\lambda P_{x-1}(t)$ をといて $P_x(t)=\frac{(\lambda t)^x}{x!}e^{-\lambda t}$。ここで $t=1$ とおけばポアソン分布が得られる。

④ 現象例[14] あるクラスで欠席者の数を1学期(96日)調べたところ次の表3のようになった。ポアソン分布にあてはめてみよ。

ポアソン分布の指導は高校段階では上記で述べたⒶ的指導法①，②，③は無理である。そこで次の実験2を通

表3

欠度者数	0	1	2	3	4	計
日　数	61	25	8	1	1	96

して，ポアソン分布の特徴を理解させる。

ポアソン分布の特徴

(i) きわめてまれにしかおこらない事象を独立に多数回くりかえすときおこる回数の分布にあてはまる型である。

(ii) 二項分布において n が大きく，p が小さいとき，普通 $p<0.05$, $n>100$ ならばポアソン分布の近似で十分の精度が得られる。

実験2　1000個の小さいビーズ玉を適当な器に入れ，このうち黒玉は5個，黄赤玉は10個，青玉は20個，赤玉は50個，黄玉は100個，緑玉は200個，白球は615個である。

(I) この器の中からランダムに5個のビーズを抽出して，緑玉ビーズの数をかぞえる。次にビーズを一度器にもどしてから，再びランダムに5個抽出して緑玉ビーズを数える。この操作を200回くりかえす。これは，$n=5$, $p=0.2$ に相当する。

(II) 同様な操作で，50個のビーズを抽出し，この中の赤玉ビーズをかぞえる。これを200回くりかえす。これは，$n=50$, $p=0.05$ の場合に相当する。

(1)の場合の実験結果は表4のとおりである。(生徒40人の中の1人の生徒の例を示す。)

表4　相対度数分布表と二項分布表
(n=5, p=0.2)

X	実際回数	相対度数	二項確率	理論回数
0	65	0.3250	0.3277	66
1	81	0.4050	0.4096	82
2	47	0.2350	0.2048	41
3	7	0.0350	0.0512	10
4	0	0.0000	0.0064	1
5	0	0.0000	0.0003	0

緑玉の出現回数を X とすると X の確率密度関数 $f(x)$ は，$f(x)={}_5C_x0.2^x0.8^{5-x}$, $x=0, 1, 2, 3, 4, 5$となり，その確率分布は表4のとおりである。

X がポアソン分布に従っていると仮定すれば，$\lambda=np=5\times0.2=1$ であるから，$f(x)=e^{-1}\dfrac{1^x}{x!}$となりその確率分布は表5のとおりである。

表4，表5より相対度数分布と二項分布とは近似しており，ポアソン分布とは余り近似していない。

表5　相対度数分布表とポアソン分布表
(n=5, p=0.2)

X	実際回数	相対度数	ポアソン確率	理論回数
0	65	0.3250	0.3678	74
1	81	0.4050	0.3678	74
2	47	0.2350	0.1839	37
3	7	0.0350	0.0613	12
4	0	0.0000	0.0153	3
5	0	0.0000	0.0030	1

以上の事から n の値が小さく p の値が小さくないときは二項分布をポアソン分布で近似するときは近似の度合はよくない事がわかる。

この事について果してそうであるか適合度検定をおこなってみる。

帰無仮説 $H_0: p=0.2$ の二項分布に従う

表4より $\chi^2=2.936<\chi^2_5(0.05)=110.7$

よって H_0 は採択され二項分布に従う

帰無仮説 $H_0: \lambda=1$ のポアソン分布に従う

表5より $\chi^2=10.39>\chi^2_3(0.05)=7.81$

よって H_0 は棄却されポアソン分布に従わない。

(II)の場合の実験結果は表6のとおりである。(I)の場合と同様に赤玉の出現回数を X とすると X の確率

表6　相対度数分布表とポアソン分布表
(n=50, p=0.05)

X	実際回数	相対度数	ポアソン確率	理論回数
0	14	0.070	0.082	16
1	38	0.190	0.205	41
2	49	0.245	0.256	51
3	49	0.245	0.213	43
4	31	0.155	0.133	27
5	12	0.060	0.066	13
6	4	0.020	0.027	5
7	3	0.015	0.009	2
8	0	0.000	0.003	1
9	0	0.000	0.000	0
10	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

分布は，理論的には，$f(x)={}_{50}C_x(0.05)^x(0.95)^{50-x}$, $x=0, 1, 2,\cdots, 50$ の二項分布に従う。

X がポアソン分布に従っていると仮定すれば，$\lambda=np=50\times0.05=2.5$ であるから，$f(x)=e^{-2.5}\dfrac{2.5^x}{x!}$ となり，その確率分布は表6のとおりである。表6から相対度数分布とポアソン分布とはかなり近似しておる事がわかる。したがって n の値が大きく p の値が小さいときはポアソン分布で近似してよい事がわかる。果

してそうであるか適合度検定をおこなってみる。

帰無仮説 $H_0 : \lambda = 2.5$ のポアソン分布に従う

表6より，$\chi^2 = 2.54 < \chi^2_6(0.05) = 14.07$

よって H_0 は採択，ポアソン分布に従う

4 おわりに

スパイラル方式による教材の配列がある程度否定され，高校における選択科目としての「確率・統計」が誕生し今までより以上に教育効果はあがるものと思う。がしかし確率・統計の知識が社会においてますます必要になってきておる現代，科目「確率・統計」の教材内容が今まででの「数学Ⅰ」「数学ⅡA」「応用数学」における確率統計教材のよせあつめというのではなく，教材の取捨選択が必要ではないだろうか。

1例として本報告は離散確率分布について二項分布のみではなく幾何分布，ポアソン分布をとりあげた。

今後，確率統計教育が「いかに数学化し，いかに数学を応用していくかということを生徒に示す最良の機会[15]」となる事を望んでいる。

参考文献

(1) 教育課程審議会：「高等学校教育課程の改善についての答申」昭和44年

(2) 文部省：「高等学校学習指導要領解説」数学編　大阪書籍　p.67　1972

(3) 前掲(2)　p.68

(4) 前掲(2)　p.124

(5) 文部省：「小学校指導書算数編」大阪書籍　昭和44年

文部省：「中学校指導書数学編」大阪書籍　昭和45年

(6) たいていの確率統計の書物には出ている

(7) 林昭：「高等学校における確率分布の指導について」数学教育学研究紀要　中国四国数学教育学会　1976

(8) 功力金二郎他：「教科書高校数学Ⅲ」数研出版　昭和50年

(9) 前掲(8)

(10) 近藤次郎：「社会科学のための数学入門」東洋経済新報社　昭和48年

(11) 国沢清典：「確率統計演習1」培風館　昭和44年

(12) 小針晛宏：「確率・統計入門」岩波書店　1974

(13) 工藤弘吉：「確率の計算」岩波書店　1973

(14) 岡田泰栄他：「応用数学Ⅰ」大日本図書　1974

(15) 平林一栄：「確率教材の指導理念」日本数学教育学会論文発表会資料　1973