島根大学教育学部紀要（教育科学）第11巻　37～47頁　昭和52年12月

数学教育における記号表現の問題（Ⅳ）
――包摂関係とその表記――

三　野　栄　治＊

Eiji MINO

Problems in Mathematical Symbolism (IV)
――Consistent Classification of Quadrilaterals and Its Diagrammatical Representations――

はじめに

包摂関係は，現行学習指導要領において，小学校・中学校ともに積極的に取り扱われ，いわば数学教育の現代化を担う集合と論理の両者を統合する典型的な事例である，と位置づけられている。(1)(2)

このたびの，教育課程の基準の改善によって改訂された学習指導要領では，このことは『現行より平易にして取り扱うもの』(3)としながらも，解説の中で次のようにいう。『数や図形の概念を指導したり，ものを分類整理したりするに当たっては，一定の条件に当てはまるものの集まりに着目することが前提となり，それによって内容のもつ意味がより明確に理解されることが多いので，集合の観点に立った見方や考え方が漸次育成されるように配慮することは，これからも必要なことである。』(4)と，数学教育現代化の精神，現行学習指導要領の理念を後退させることなく引き継ぐことを強調している。

中学校数学についても同様に，図形指導に関して次の要請をしている。図形指導の目標の一つに『空間についての認識を深めること』(5)を挙げ，『ここにいう「空間」とは，たて・よこ・高さをもつ，いわゆる三次元としての空間のみを意味しているのでなく，その図形の置かれている全体集合をも意味している。即ち，一つの図形とその図形のおかれている全体集合との関係認識』や『空間構造を直観的・論理的に見通す認識力』(6)を深めることの大切さを要請しているが，その具体的事例の一つに，『長方形，ひし形，正方形などの四角形の包摂関係』を示している。さらに，集合・論理との関連にも触れて，次のようにいう。『集合・論理の考えは，数学を創って行くときのてだてであって，生徒が記憶すべき，数学の内容として受け取られることを避けるため』(7)に，領域としての「集合・論理」が削除されたが，『集合・論理が中学校数学からまったく消滅したということではない』(8)のであって，いうまでもなく『図形指導，とくに論証幾何の指導においては，集合・論理の考えを活用することが大切である。』(9)そのための具体的事例として，『平行四辺形，ひし形，長方形，正方形などの包摂関係』を，さらにあらためてうたっている。

この精神は，数学的な見方・考え方の一つの面として数学教育で必要とされるものであって，決して排除されるべきものではない。だからといって，その具体化あるいは教材化や取り扱い方法において，現有のものを流用するという無批判な態度は許されるべきではない。

包摂関係については，他の現代化の教育内容と同様，十年間の実践があるにもかかわらず，本質に触れる検討が十分になされているとはいえない。学習指導要領にもとづいた実践の場に移されてしまってからは，与えられた内容（教科書）をどのように理解させるか，どこが学習困難か等の把え方に終始しており，そのような把え方による包摂性ではたして問題はないのか，には及んでいない。では，実践に移されるまでの実験研究では地道で多質多様な研究がなされていたのか，といえば，これも不十分であって，教育対象として可能性がありそうだ，の程度だけから，いきなり実践に移されたといっても過言ではない。

いわゆる数学教育の現代化は「数学」から始まり「人間」に視座がないために欠陥があった，とはよく耳にすることであるが，むしろ，真の「数学」に触れさせることなく，首尾一貫した見通しも，より本当の数学の姿を垣間みることさえなされない有様では，これは現代化でも何でもない。

たとえば，子ども達にとって馴染のある「たこ形（凧形）」は，四角形の包摂関係の中でどこに位置するのだろうか，という実に素朴な質問(10)に対して，現在の教科書

＊　島根大学教育学部数学教育研究室

からは何の解決も与えてくれないのである。そのことはまた，併行して手軽に用いられているオイラー図やベン図についても，その使い方にかなりの検討が迫られるところがでてくることになる。

われわれが包摂関係を考察する場合（たとえば，四角形の），四角形の概念の間の従属関係はどのようになっているか，を明らかにすることにあるのであって，それは概念を構成している側面：外延と内包に目を向けることであり，分析力と論理性を要請することになる。

図形の性質は，顕在的に識ることのできる辺の長さや平行性，角の関係，あるいは潜在的な対角線の関係等々についてのものであるが，小学校の子ども達には，どちらかといえば，それらが一体なものとして認識されるのがふつうであって，分離を意識している文言のレベルよりはむしろ，現象面にひきずられる議論や指導に流れがちとなる。

手軽にみえ，しかも常識的に明らかである，というような前提のもとに取り扱われている包摂関係は，その実，深い内容をもち，短絡的なものではない。

このことについて，四角形の包摂関係の特性を分析することを通して考えてみよう。

I．包摂関係について

1．包摂とは，ある概念がより一般的な概念に包括される従属関係である。

それは，一つの類に属するすべての対象に共通な性格を一つの表象のうちに統一しようとする働きのもとに行なわれる数学的活動である。と同時に，そこには現実には分離されていないものをも引き離して考察するというような働きもあってこそ，可能になるものなのである。すなわち，包摂性を課題とすることは，いわゆる一般化すること，抽象すること，というきわめて大切な数学的活動を課題とすることであり，この一般化すること，抽象することは同時に，命名する活動をも併せ進めることであるから，それだけの基盤づくりと，心的傾性への配慮が要請されるものなのである。

包摂とは，ある概念がより一般的な概念に包括される従属関係であると述べたが，概念 A が概念 B に「包括される従属関係」とはどういうことなのか，あるいは，それをどうして認知していくのか，という操作的な立場が学習指導上の大きなテーマとなる。

言うまでもなく，概念を構成している外延という側面からみれば，B の外延量が A の外延量より大であり，しかも B の外延の他に A の外延がないこと。

すなわち，集合A，Bの間に包含関係 A⊂B が成り立つことであり，オイラーの図を用いれば［図1］がこれに対応する。

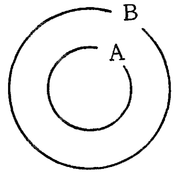


図　1

ところで，このオイラーの図は，命題：A は B である（あるいは，すべての A は B である）の表象でもあるから，命題の上でも包摂関係が把えられる。

一方，図形指導では，その図形が保存している性質を顕在化していくところに大きな仕事が与えられている。図形がもつ性質を明らかにすることは，概念のもう一つの側面すなわち内包を視点とすることである。

外延と内包の関わりについては，われわれにとって明らかに「外延量が多くなると内包は少なくなり，その逆もまた正しい。」のであるが，学習指導上は，このこと自体が教育対象であり，この理解から始まるとみなければならない。しばしば指摘される喩に「宵の明星」と「明けの明星」がある。これは，同一のものに対して違うことばを遣うことの喩である。四角形と四辺形ということばは，まったく上の喩どおりである。正方形・長方形・ひし形・平行四辺形等のことばについても同様であって，内包的性格づけである。しかもこの側面からの命名と概念とは，爾来固定してしまったものではなく，概念のほうは成長・発展している。ことばは生きているとみなければならない。われわれはこのことに，つねに配慮しなければならないといえよう。

2．包摂関係の，学習指導上の問題点について，一つの集約がある。[11]

その論旨の，特徴的なところを拾ってみると，次の3点である。

(1)『図形認識には対立概念となるように定義するとよい。論証上は包摂概念となるように定義すると便利だが，必要というのではない。』

この論拠として，ユークリッド原論（中村幸四郎他訳，共立出版社）における三辺形・四辺形の定義がいずれも対立概念になっていることを挙げている。

(2) 包摂関係を明らかにするには，「含む」・「含まれない」の関係がはっきりとらえられなければならないが，この理解のさせ方は，定義の立場よりも性質を含めた観点でみた方が定着しやすいだろうと思う——という手島勝朗氏の意見を批判して，次のようにいう。

『「定着」は別におくとして，「含む・含まれない」の関係を理解させるのに，性質を用いるというのは筋道が全く反対である。定義によるのが適当であるということは明らかである。』

(3)　正三角形が二等辺三角形に包摂されることについて，『包摂関係を理解して後に，二等辺三角形の定理が正三角形に適用できる，というのではなく，逆に二等辺三角形の定理が正三角形に適用できることを認めたが故に，包摂関係として捉えられる，と私はいいたいのである。』

こういう認識で，はたして〝問題点の究明〟になっているだろうか。また，妥当なものだろうか。

この論旨を話題としながら，包摂関係の問題点をさぐってみよう。

まず，ユークリッド原論において，たとえば四辺形の定義がすべて対立概念となっている，と簡単に述べているが，資料(12)をも併せて検討すれば，より正しい認識が得られよう。「正方形」と「矩形(ἑτερόμηκες, oblong)」と「菱形」については，辺――等辺である・等辺でない，角――直角である・直角でない，によってつくられる2×2分割表の中に位置づけられている。しかし，「長斜方形」については，上の2つの座標軸だけではなく，対辺――等しい・等しくない，対角――等しい・等しくない，をも援用した中に位置づける。そして，それら以外の四辺形を一括して「トラペジア（トラペジオン）」と名付けているのである。

さて，横山によれば，たとえば正方形と長方形についていえば，現在の算数・数学の教科書で採られている定義：　長方形：『4つの角がすべて直角である四角形』
　　または，『4つの角がすべて等しい四角形』
は，正方形の概念を包摂しているから，論証上は便利であるが，図形認識上はよくない。認識上は，むしろ，上のユークリッドのように考える（長方形を「矩形」の意味に限定する）のがよい，とする。この主張の中に，論証と図形認識を分けて考えることの他に，「図をかくこと」と「図によって学習すること」，そして代表元は「一つの図でなければならない」という前提を見い出す。

図表記の本質は『一つの図をかいて，それを一般的包括的なものと思う』(12) ところにあることは，いうまでもない。

たとえば，長方形の図表記は，その概念を過不足なく具現化したものである（定義を用いて図示するなら，「すべての角が直角（または，すべての角が等しい)」だけを保存する図）ことが要請され，その代表元にあたる図，ということになる。

ところが，その概念 B（長方形）は存在しても，これだけの情報をみたす代表元としての一つの図は存在しない。なぜなら，図が描かれてしまえば，そこにはすでに辺の長さが示されてしまい，ユークリッド的に分割しても $a=b$ か $a\neq b$ かのいずれかに属してしまう。すなわち，描かれた図は

- $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle R$ かつ $a=b$

または

- $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle R$ かつ $a\neq b$

の代表元になってしまっている。

ところで，$a=b$ をみたすほうの集合 A には別の名前：正方形が用意されている。したがって，概念 B の〝送り手〟にとっては，一つの概念を一つの図で代表する限り，概念 $B-A$（「矩形」）の図と同じになってしまう。換言すれば，〝受け手〟からみれば，図から概念を復元する際，B と $B-A$ の両者が可能であり，視覚的にはむしろ $B-A$ への結びつきが強くなる。その心理性のもとに体系化せよ，というのが横山の主張である。

この論に従えば，『4つの角がすべて等しい四角形』に限らず，『4つの辺がすべて等しい四角形』も『向かい合った2組の辺がそれぞれ平行である四角形』も，これだけの情報を過不足なく図示することが不可能であるがゆえに，長方形・ひし形・平行四辺形などの概念をもっと閉じ込めなければならない。

図形の性質を考察する場合，描かれた図がその概念の代表元であるかどうか，への配慮は必要であろう。それは，性質はあくまでその概念の外延全体に及ぶ一般的なものであることが要請されているからである。しかし，包摂性については，図をかくことや，描かれた図とは切り離して考察することができるし，またそういうものである。図をかかなければならないという先入観から解放される必要があろう。

もちろん，容易に，この立場に到達できるとは思わない。正方形も，いわゆる正方形でない長方形も含めて長方形を示し，長方形の定義・いろいろな性質と，正方形のそれらを対峙させることによって，正方形と長方形が共通にもっている性質（そこから，正方形が長方形の特性をみたしていること）や，さらに正方形だけが，かくかくの特徴をもっていることを発見させる，というような教育的配慮は，あらかじめ伏線として計画する必要はあろう。平行四辺形を考察する場合でも，この手立てはやはり必要である。平行四辺形と部分であるひし形，平行四辺形と残りの部分である長方形，そうすれば必然的に正方形まで，という各ステップにおいて考え統一していく，のが包摂関係の基本である。

包摂性は論理である。したがって，包摂概念は対立概念にくらべて積極性を要請する。その上，ことばは生きている。この数学性を受け止めずして，旧き時代に引き戻すという態度は妥当ではない。むしろ，取り扱い方法（語用法）において配慮・工夫することが急がれよう。

第二に，定義・性質というのは概念における一つの系列であって，固定的なものではない。定義はことばや記

号の意味を定めることであって，概念のすべてではない。

まず，概念の内包は，定義・性質を用いて明らかにされ，外延は，集合あるいはそれを分割することを通して明らかにされるが，概念はこの両者の総合体であり，定義・性質と集合の両面を統一していくことによって概念が十分に理解され達成されていくものである。たとえば，《四角形》という概念は，それがもつ特性（内包）と，すべての四角形の集合（外延）とを統一したもの，である。しかも，一つ一つの概念は，孤立したものとしてではなく，互いに有機的な関連しあう概念系として組立てられることによって，なお一層の理解が深まることになる。

さて，いま集合 B を考える。この B において，B を成立させている性質以外に，性質 a をさらにもつ要素と，もたない要素があるとしよう。

このとき，性質 a は，集合 B を２つに分割する。すなわち，

$$\mathrm{A}=\{x \mid x \in a(x) \wedge B\}$$

とすれば，

$$\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \text{ かつ } \bar{\mathrm{A}}=\{x \mid x \in (\neg a(x)) \wedge B\}=\mathrm{B}-\mathrm{A}$$
$$(\mathrm{A} \cup \bar{\mathrm{A}}=\mathrm{B},\ \mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{A}}=\varnothing)$$

したがって，集合 B の部分集合 A を，性質 a を用いて定義することができる。たとえば，集合B：平行四辺形，性質 a：直角をもつ，とすれば，A は長方形であって，《直角をもつ平行四辺形である》と定められる。しかし，性質 a：対角の和が等しい，としても，A は長方形であって，《対角の和が等しい平行四辺形》でもって長方形とすることができる。このことは，対角線の長さ等を用いても定められることであって，かくて包摂関係の決定は一意でないことがわかる。一意でないから，都合のよいものどれを用いてもかまわない，ともいえそうであるが，包摂関係では有機的な関連，首尾一貫性を大切にするから，この立場への配慮が要請される。

したがって，包摂性を学習させるのに定義によるのが適当であるという結論は，どこからも引き出し得ない。包摂関係は，概念と概念の間にある従属関係であるから，定義・性質の全体を対峙させ，その整合性を思惟対象とするところに課題がある。そのことはまた，推移律の問題であり，順序性・首尾一貫性の思想でもある。

ただ，包摂関係へのアプローチのしかたについては，

• 包摂性をある程度理解して，いろいろな場面に適用しながら達成する。

または，

• 一つあるいはいくつかの場面で事例研究しながら，包摂性を形成し，達成していく。

という学習指導の順次性の差異についての問題であり，意見の分かれるところであろう。

第三に，最後の問題点を，中学校教科書ｆの例を引用して指摘しておきたい。

『(1)長方形の定義：４つの角が等しい。⟶(2)「問」：長方形の４つの角はすべて直角であることを証明せよ。⟶(3)定義により，長方形の２組の対角はそれぞれ等しい。⟶(4)したがって，長方形は平行四辺形の中の特殊なものである。』（下波線は，筆者）

これは横山のいう『平行四辺形の定理が長方形に適用できるが故に，包摂関係として捉えられる』という論法にあてはまるようにもみえる――実は，このこと自体が包摂関係を認識していく立場の一つとして大切な教育対象である――が，この第４段における〝したがって〟は子ども達にとっては論理的帰結の「したがって」ではない。なぜなら，上例の前後の文脈において，この部分は包摂関係を形成していく場面であるから，この〝したがって〟は，すでに長方形が平行四辺形に包摂されるという事実を知っている作者（または教師）にとっての確認作業から出てきた〝したがって〟である。指導上，包摂関係を生み出していこうとする場に，すでに包摂関係を使ってしまう，いわゆる循環論法を多分に潜ませているといえる。

「論理」を柱にしながら論理性がなく，その場だけの都合のよい面に着目する包摂関係の学習では，構成が不十分であるに止まらず，歪みのある固定観念をおしつけることになってしまい，〝数学的な見方・考え方〟を自らが崩壊させるようなものである。

Ⅱ　四角形の包摂関係――現況と問題点

１．中学校数学教科書の記述から。

教科書ａ．『定義からわかるように，長方形，ひし形，正方形は，すべて平行四辺形である。』

教科書ｂ．『正方形は特別な長方形であると考えられるか。また，特別なひし形であると考えられるか。定義をもとにして調べよ。』

教科書ｃ．『（定義を記述したあと）問．次を証明し，逆の真偽を調べよ。

１．ひし形は平行四辺形である。２．………』

教科書ｄ．『４つの辺の長さがすべて等しい四角形がひし形である。このことから，ひし形は平行四辺形であることを証明せよ。』

教科書ｅ．『長方形やひし形は平行四辺形である。このことを定理２（平行四辺形になるための条件）を用いて証明せよ。』

教科書ｆ．長方形の定義を与えておいて，『問．長方形の４つの角は，すべて直角であることを証明せよ。』

そして『定義により長方形の2組の対角はそれぞれ等しい。したがって，長方形は平行四辺形の中の特殊なものであり，平行四辺形の性質をすべてもっている。』

文脈を考慮に入れても，包摂関係とはどういうものか，どのようにして考えていくか等についての説明があらかじめあるというのでもなければ，これらの学習を通して包摂性を形成し見通させるという焦点づけもない。

全体的傾向としては，包摂関係は「定義から明らかになる」ものであり，「自分で，定義から調べることができる」ものであるという位置づけである。しかしながら，実際上は，定義だけはなくいろいろの性質を明らかにした上でそれらの性質の都合よい面を使用せざるを得ないようになっている。たとえば，教科書 f では，「2組の対角はそれぞれ等しい」を利用して，長方形が平行四辺形に包摂されることを，また教科書 c では，「2つの対角線はおのおのの中点で交わり，かつそれらの長さが等しい」という性質によって，長方形と平行四辺形の包摂関係を求めさせる。一方，教科書 e では，平行四辺形に条件「1角が直角である」を付加させることによって長方形を把握させようとする等々，文言と実際の手続きに差のあることが窺える。

なかには，等脚台形の定義や性質が他の四角形と同等に扱われながら，包摂関係を考察する場面では等脚台形は除外され，一言もふれられていない。

また，等脚台形を考察するのであれば，ちょうどそれと同等で対称的な位置を占める（後述）「凧形」には，なぜふれないのだろうか。

2. ただし，部分的な図表記に止まっているもの，円やだ円やその他によるもの，があるが，まとめていえば，共通して次のような図式が付けられている（図2，図3）。

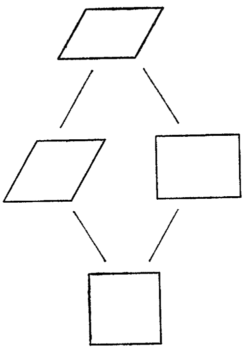


図　2

このような図において，凧形や等脚台形（以下，正台形と書くことにする）は，どこに位置するのだろうか。また，もしその図式化がむずかしいとすれば，なぜむずかしいのか。

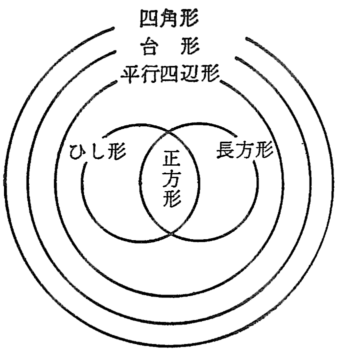
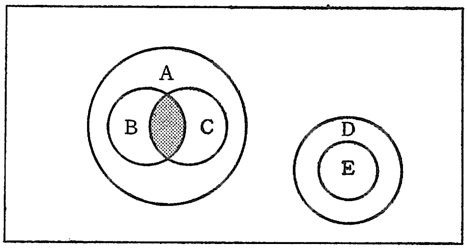


図　3

なお，図4，図5は，それぞれ資料(14)，(15)にみられるものであり，包摂関係の検討の不十分さを示している例ともいえよう。



U＝{Quads.}
A＝{parallelograms}
B＝{rectangles}
C＝{rhombuses}
D＝{trapezoids}
E＝{isos. trapezoids}
B∩C＝{squares}

図　4

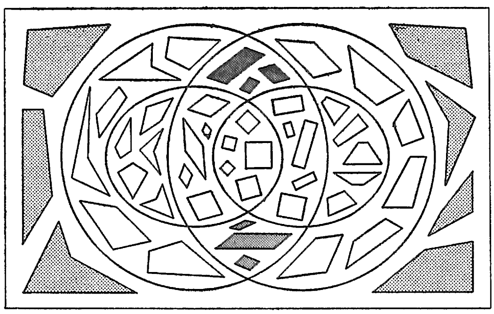


図　5

Ⅲ　四角形の包摂関係の構造化

1. 固有の名前をもつ四角形（包摂概念としての）といえば，正方形，長方形，ひし形，平行四辺形，凧形，

正台形，台形をすぐさま思いうかべるが，それらの包摂関係を首尾一貫あるものにするため，さらに拡大した世界：内接四角形，外接四角形，歪凧形（後述）をも含めた10種を全空間として考えてみよう。

その際，その空間の各要素が，包摂関係のもとで，首尾一貫した一つのパターンのもとに互いに結合されるとき，これを包摂関係の《構造化》と呼ぶことにする。

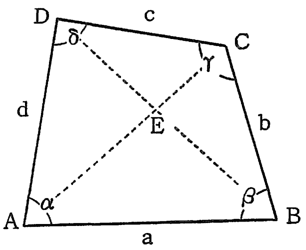


図　6

四角形ＡＢＣＤにおいて，各部分に上の記号をおく(図6)。また，四角形ＡＢＣＤで，ＤＥ＝ＥＢのとき，この四角形を「歪凧形」と名付けておく。

2. 正方形・ひし形・凧形が，いずれも円に外接する四角形であることから，

一般な四角形と外接四角形，歪凧形と凧形，

平行四辺形とひし形，長方形と正方形

は，それぞれ「ａ＋ｃ＝ｂ＋ｄ」という条件のもとに，同じ差の関係にある。

なお，ａ＋ｃ＝ｂ＋ｄは，四角形ＡＢＣＤが円に外接するための必要十分条件である。

矢印⟶によって，包摂する・包摂されるの関係を表示することにすれば，上述のことは図7にまとめられる。

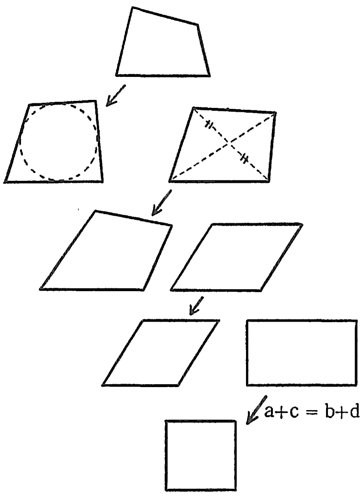


図　7

3. 一般な四角形から歪凧形を成立させる条件「ＤＥ＝ＥＢ」は，台形と平行四辺形，正台形と長方形の間にも存在する関係で，それぞれ同じ差である。

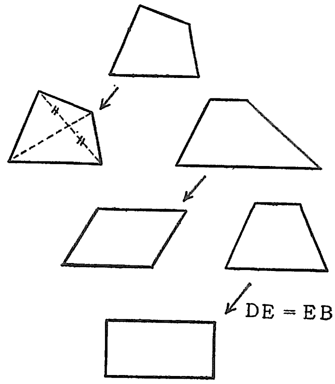


図　8

4. 「$\alpha+\gamma=\beta+\delta$」は，四角形が円に内接するための条件であり，正台形，長方形，正方形がいずれもこの条件をみたすから，図9の関係が成立する。

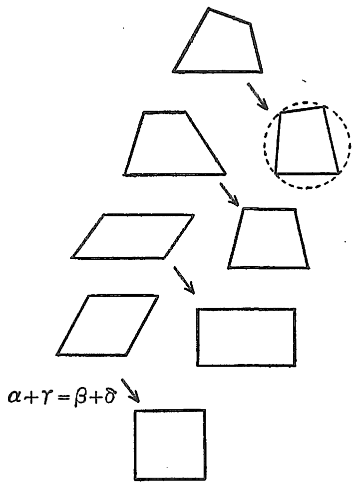


図　9

5. 一般な四角形から台形を生成するのは，条件「$\alpha+\delta=\beta+\gamma$」で，これはそのまま，歪凧形と平行四辺形，凧形とひし形の関係であり，図10となる。

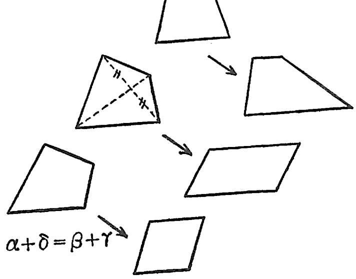


図　10

6. 以上まとめると，4条件：
a＋c＝b＋d；DE＝EB；$\alpha+\delta=\beta+\gamma$；$\alpha+\gamma=\beta+\delta$ によって，10種の四角形は構造化される。それが図11，または図11′である。

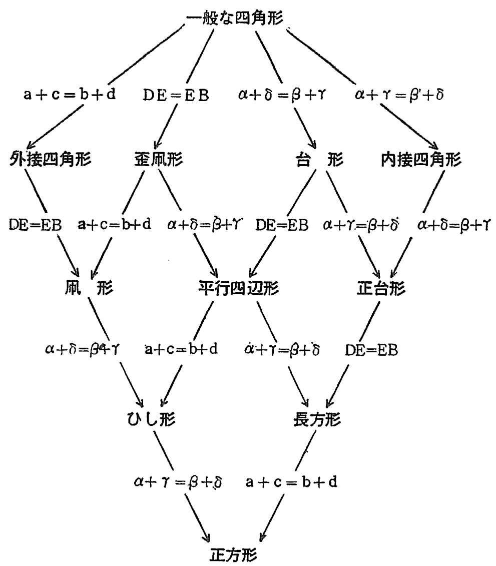


図　11

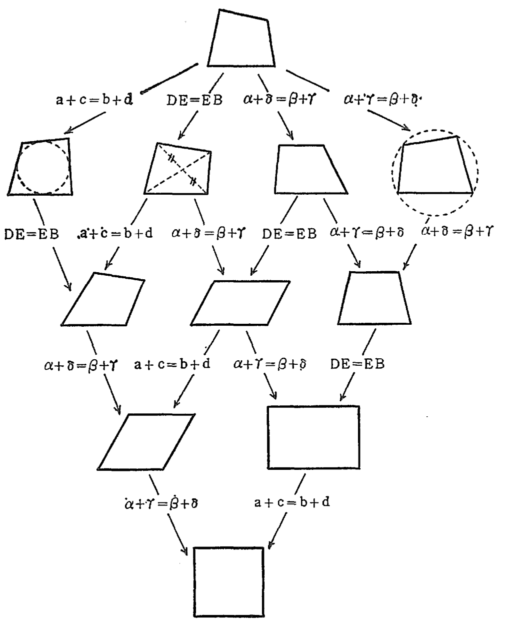


図　11′

Ⅳ　包摂関係の図的表現

包摂関係の構造を図的表現することを考える。

A が *B* に包摂されるとは，概念の外延についていえば *B* の外延量が *A* の外延量より大であって，しかも *B* の外延の他に *A* の外延がないこと，すなわち集合 A，B の間に包含関係 A⊂B が成り立つことであり，一方，内包についていえば，*A* の内包量が *B* のそれより大であって，しかも *A* は *B* の内包をすべて保存すると同時にそれ以外の性質をもつこと，であった。

前者の立場から図式化を考えれば，オイラーの図が適用され，ベンの図式が使える。

また，後者の立場からは，矢線の図式と，4次元空間のモデルが使えよう。

1. L. オイラーは，1761年『Lettres à une Princesse d'Allemagne, Lettre CII』[16] の中で，伝統的な命題形式

"A" : Tout *A* est *B*.
"E" : Nul *A* n'est pas *B*.
"I" : Quelque *A* est *B*.
"O" : Quelque *A* n'est pas *B*.

を論じ，それぞれの表象として，次の図12を示している。

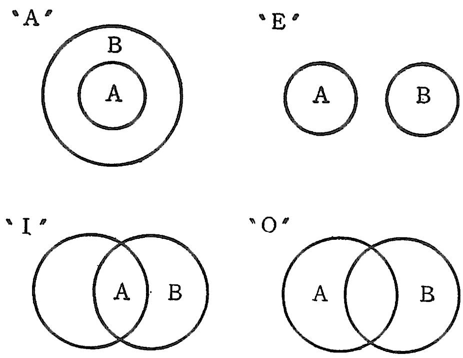


図　12

ひきつづき，『Lettres CIII—CVIII』[17] において，三段論法形式のいろいろなタイプについて論ずるとともに，その図表象を考察している。

さて，われわれがここで必要とするのは四項関係の表示である。オイラーが考察している三項までの関係の考え方から，推察することによって，四項関係の図を描いてみよう。次の図13がそれである。

これの詳細についての説明は不要であろう。

2. イギリスの論理学者 J. ベンは，1880年，オイラーの図に検討を加え，その問題点を指摘しながら，自分の図式（図14）をつくり出した。[18][19]

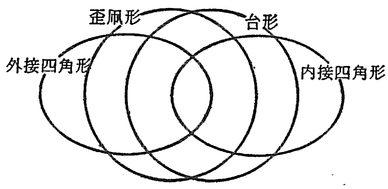


図　13

それは，次の図14である。

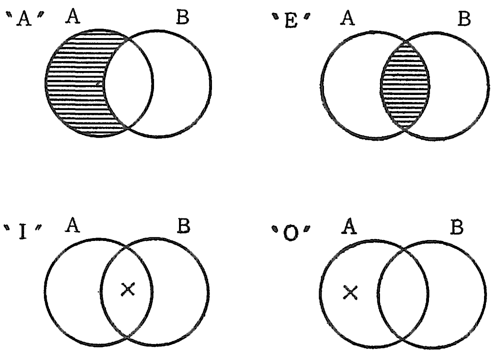


図　14

このベン図式とオイラー図を比較してみよう。

オイラーの図が，論理形式の《含意》をそのままイメージ化（イメージ化とは，感覚的表象であり，抽象化というのではなく具体的であり，しかも普遍性をそれほど意図しないもの，と考える）したものであるのに対して，ベンの図式は，含意のまま把えて図式化したというよりは，それと論理的に同値な《連言》の形式の図表象であるとみられる。

それはまた，《すべて》に力点をおくか，《存在するかどうか》に力点をおくか，のちがいでもある。

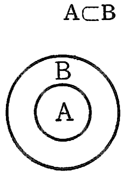
ベン図式は，オイラー図にくらべて，むしろ知的分析的表象であり，しかも普遍性を意図しているところに，その特徴がある。なぜなら，図15，図16がそれを一目瞭然のものとするからである。

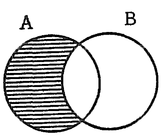
オイラー図　　　　　　ベン図式

"A"：

$$\forall x(A(x) \longrightarrow B(x)) \equiv \neg\exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$$

$A \subset B$　　　　$A \cap \overline{B} = \emptyset$

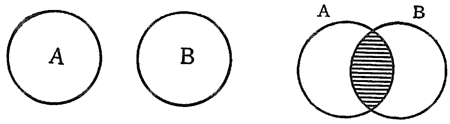




"E"：

$$\forall x(A(x) \longrightarrow \neg B(x)) \equiv \neg\exists x(A(x) \wedge B(x))$$

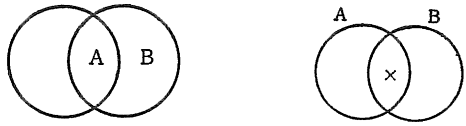
$$A \cap B = \emptyset$$



"I"：

$$\neg\forall x(A(x) \longrightarrow \neg B(x) \equiv \exists x(A(x) \wedge B(x))$$

$$A \cap B \neq \emptyset$$



"O"：

$$\neg\forall x(A(x) \longrightarrow B(x)) \equiv \exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$$

$$A \cap \overline{B} \neq \emptyset$$

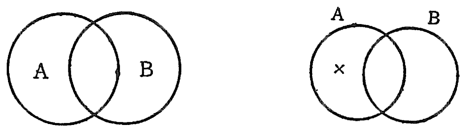


図　15

さらに，命題"A"と"O"，"E"と"I"はそれぞれ互いに他の《否定》であるが，その状態はベン図式では「空である」と「空でない（存在する）」が，斜線部分と×印によって対応しており，まさに象徴的な図式であり，わかりやすい表象でもある。[20]（図16）

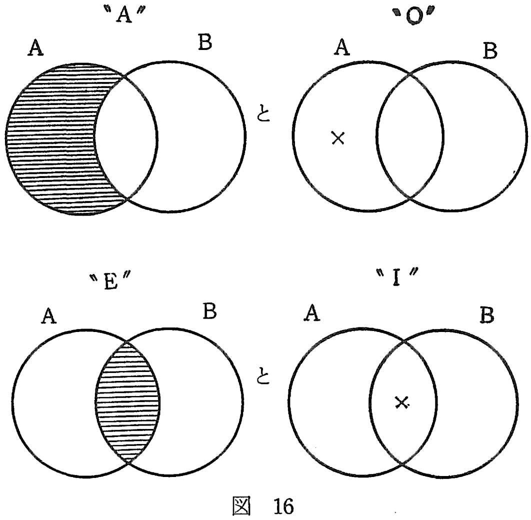


図　16

それに対して，オイラー図では，この否定関係が視覚的象徴的にとらえることがむずかしい，といえる。

この《否定の論理》の巧みな利用の他に，さらにベン

図式の特徴を挙げれば，「交わる２円」という一つの基本図形だけで済む，ということもいえよう。

さて，われわれが必要としているのは四項関係であるが，四項関係についての基本図形が，ベン図式では用意されている。図17がそれである。

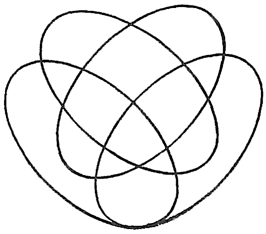


図　17

図11で示した構造を書き直せば，次の通りである。

Ⅰ）１条件だけをみたす四角形

1.　ａ＋ｃ＝ｂ＋ｄ：外接四角形，

2.　ＤＥ＝ＥＢ：歪凧形，

3.　$\alpha+\delta=\beta+\gamma$：台形

4.　$\alpha+\gamma=\beta+\delta$：内接四角形

Ⅱ）２条件を併せもつ四角形

1.（ａ＋ｃ＝ｂ＋ｄ）∧（ＤＥ＝ＥＢ）：凧形

2.（ＤＥ＝ＥＢ）∧（$\alpha+\delta=\beta+\gamma$）：平行四辺形

3.（$\alpha+\delta=\beta+\gamma$）∧（$\alpha+\gamma=\beta+\delta$）：正台形

Ⅲ）３条件をもつ四角形

1.（ａ＋ｃ＝ｂ＋ｄ）∧（ＤＥ＝ＥＢ）∧（$\alpha+\delta=\beta+\gamma$）：ひし形

2.（ＤＥ＝ＥＢ）∧（$\alpha+\delta=\beta+\gamma$）∧（$\alpha+\gamma=\beta+\delta$）：長方形

Ⅳ）４条件をすべてもつ四角形

（ａ＋ｃ＝ｂ＋ｄ）∧（ＤＥ＋ＥＢ）∧（$\alpha+\delta=\beta+\gamma$）∧（$\alpha+\gamma=\beta+\delta$）：正方形

これら10種の四角形を，四項のベン基本図形の各部分にあてはめていく。なお，その際，基本図形の４つのだ円にそれぞれ左から順にⅠ—1.（外接四角形），Ⅰ—2.（歪凧形），Ⅰ—3.（台形），Ⅰ—4.（内接四角形）を対応させておくが，どのだ円にどの概念を当てるかは，本来，順序性に問題はない。

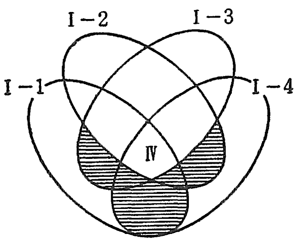


図　18

ところで，図18で斜線をほどこした「空」であるところには，何ら対応する四角形がない，ということだろうか。

ベン図式の概念から，明らかに，次の四角形が考えられる。

Ⅱ′）２条件をもつ四角形

1.（$\alpha+\delta=\beta+\gamma$）∧（ａ＋ｃ＝ｂ＋ｄ）なる四角形

2.（ａ＋ｃ＝ｂ＋ｄ）∧（$\alpha+\gamma=\beta+\delta$）なる四角形

3.（$\alpha+\gamma=\beta+\delta$）∧（ＤＥ＝ＥＢ）なる四角形

および，

Ⅲ′）３条件をもつ四角形

1.（$\alpha+\delta=\beta+\gamma$）∧（ａ＋ｃ＝ｂ＋ｄ）∧（$\alpha+\gamma=\beta+\delta$）なる四角形

2.（ａ＋ｃ＝ｂ＋ｄ）∧（$\alpha+\gamma=\beta+\delta$）∧（ＤＥ＝ＥＢ）なる四角形

では，これらの四角形が論理的には存在しても，実際上，存在するのだろうか。

たとえば，Ⅱ′—１は，Ⅰ—１，Ⅰ—２と区別される固有の名前が与えられていないにすぎないものであって実在する。Ⅱ′—２，Ⅱ′—３についても同様である。Ⅲ′—１は正台形であるが，Ⅱ—３にもう１条件が付け加えられているところの正台形であって，これに「ＤＥ＝ＥＢ」が加われば，いきなり正方形となってしまう位置（３条件をもつ四角形）にある。Ⅲ′—２も同様で，３条件をもつ凧形ではあるが，ひし形ではない。この凧形に「$\alpha+\delta=\beta+\gamma$」を加えれば，正方形である。

このことは，図11で示されている構造が，固有の名前をもつ10種の四角形からはいって，４つの条件で首尾一貫性のあるものを整えたのに対して，論理的にはそこからさらに，Ⅰ—３とⅠ—１，Ⅰ—１とⅠ—４，Ⅰ—４とⅠ—２との新しい組合せから出発して，同じ４条件で構造化することもできる，ということである。

いわば，図11の構造に対して，論理的に（10種という空間からは逸脱するが）〝影の部分〟が同時にみられることになる。この影の部分を示せば，次の通りである（図19）。

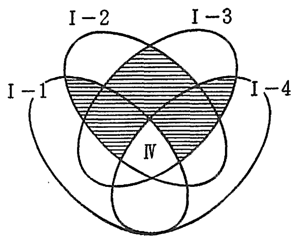


図　19

3.　図11は，そのまま，包摂関係の表記の一つを示している。それは，内包に着目したもので，２つの概念

A，B の間に，内包が一つ増減することによって包摂関係が成り立つ（たとえば，B の内包にもう一つの性質が加わったのが A である）とき，B から A に向かう向きの矢線を用いて，上一下の位置において結ぶ，というものである。

$$\begin{array}{c} B \\ \downarrow \\ A \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} C \\ \downarrow \\ B \\ \downarrow \\ A \end{array}$$

また，A が B に包摂され，さらに B が C に包摂される（すなわち，推移律で間接的に順序づけられる）とき，A と C とは直接には結びつけない。

この規則によって，構造を図示する方法である。

4．内包に着目する立場から，次のようにも考えることができる。

10種の四角形が，4つの条件の保存の有無によって構造化されたのであるから，

それらの条件を保存すれば，「1」

保存しないなら，「0」

を対応させ，さらに4条件を，a＋c＝b＋d，DE＝EB，$\alpha+\delta=\beta+\gamma$，$\alpha+\gamma=\beta+\delta$ の順に，4桁配置とする。

すなわち，4桁二進数を各四角形にあてはめる。

たとえば，a＋c＝b＋dなる四角形，すなわち外接四角形に「1000」，

（DE＝EB）$\wedge(\alpha+\delta=\beta+\gamma)$ なる四角形，すなわち平行四辺形には「0110」のように，である。

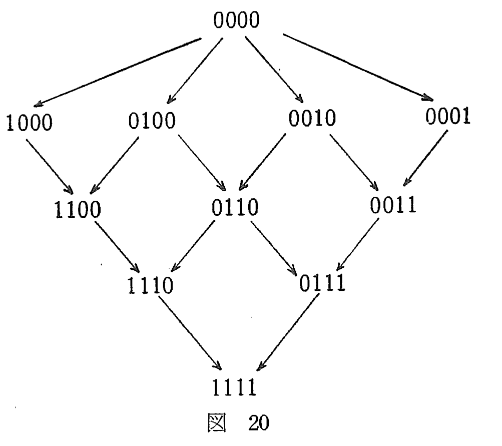


図　20

図20は，図11を4桁二進数によって書き換えたものである。しかし，この図20が，ここでのねらいとする図的表現ではない。

4桁二進数は，4次元立体をモデルとしてもつ。すなわち，図21のように，4桁二進数は4次元立体の頂点に対応させうる。

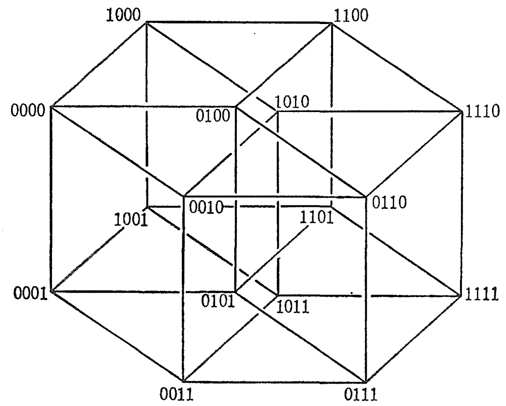


図　21

したがって，図11の構造は，頂点0000から4つの辺を順次経由して最短経路で，対頂点1111に至るルートであり，その途中の経由頂点が，与えられているレベルⅠ，Ⅱ，Ⅲの四角形である。

なお，0000から1111に至るルートのうち，経由しないルートが，前述の〝影の部分〟を示していることは明らかであろう。

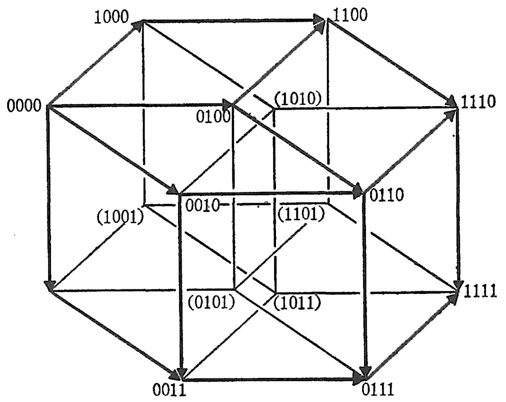


図　22

Ⅴ　結　　び

包摂関係の特性を，四角形を例として考えてきた。その過程の中で，小・中学校で取り扱われている包摂関係には構造とか首尾一貫性という視点からは，明澄さを失なわせているところがあることを指摘した。それは，固有の名前をもった四角形を少し拡げた10種の四角形の包摂関係を基底として眺めるだけでも，問題点が浮かび上がってきたのである。

⑴　包摂関係は，手軽に扱える・常識的に明らかである，という立場は，まず改められなければならない。

包摂関係は，短絡的ではなく，たとえば図形を多面的に分析することや論理性が要請されるものであり，しかも包摂性そのものへの考察（たとえ研究対象とするにせよ，方法論とするにせよ）を欠かすわけにはいかない。

(2) 包摂関係は論理そのものであるから，認識上は対立概念，論証上は包摂概念と分離すること自体，かえって混乱を大きくし深めていくものであり，その場当たりの収拾をはかろうとするものである。概念そのものに問題点を凝固させるのではなく，取り扱い方の問題として工夫していきたい。

(3) しかも，概念を定義の問題として関係づけるのではなく，概念と概念をマッチングさせることが基本である。したがって，たとえば図形を考察し，ある程度の論証が可能であり，条件を増減することによって新しい図が認識できる等の基盤が要請される。

(4) もし，包摂関係（たとえば，四角形の）を，小・中学校の教育内容として取り扱うとして，正方形・長方形・ひし形・平行四辺形，あるいは台形までの包摂関係を扱うとしても，子ども達にとってごく素朴な形であるところの凧形や正台形が，少なくとも考察の対象として加えられることを前提とした包摂関係を教材研究することが必要である。

このことは，実に自然な数学的な見方・考え方そのものである。

(5) 包摂関係の図的表現において，外延に目を向ける場合と，内包を把える場合とでは，それぞれの特徴が現われてくるものである。オイラーの図や，ベンの図式にしても，ひじょうに粗雑に扱われ，往々にして正しく理解されていない。これらの図的表現は，手軽にみえて，その実，深い背景——たとえば，イメージ力や，そうではなくむしろ分析力等が，必要に応じて要請されるものであり，そのもとにはじめて正しく，うまく使いこなせることができるのである。小手先の器用さに溺れないようにしたいものである。

矢線を用いての上一下による表示法(たとえば,図11′)は，比較的に準備を必要としない表わし方である。なぜなら，算数・数学の中によくみられる例：(12の約数全体，「割りきる」という関係）の構造と，四角形の包摂関係の構造（図11）とは，まったく同じ手続きに従ってつくられていくからである。

引用文献

（1）文部省：小学校指導書　算数編，pp. 129－130，昭和44年
（2）文部省：中学校指導書　数学編，pp. 116－134，昭和45年
（3）文部省：小学校学習指導要領（解説付），初等教育資料　No.354，p. 138，昭和52年
（4）上掲(3)，p. 142
（5）大野清四郎他（編）：改訂中学校学習指導要領の展開　数学科編，明治図書，p. 60，昭和52年
（6）上掲(5)，p. 60
（7）上掲(5)，p. 63
（8）上掲(5)，p. 63
（9）上掲(5)，p. 63
(10) 島根大学教育学部附属小学校での，実際の授業の中で出された子どもの質問。
(11) 横山正三：小学における包摂関係の問題点の究明（日本数学教育学会誌　算数教育 25－5，pp. 19－26，1976）
(12) Sir Heath, T. L.: The Thirteen Books of Euclid's Elements vol. 1, Dover, pp. 188－190, 1956.
(13) 赤摂也・吉田夏彦：人間と数学，朝日新聞社，p. 116，1976.
(14) Jurgensen, R. C. et al.: Modern School Mathematics: Geometry, Houghton Mifflin, p. 245, 1972.
(15) Schweizer, W. et al : Lambacher-Schweizer mathematisches Unterrichtswerk: Geometrie I, Ernst Klett, s. 70, 1972 (3. Auflage)
(16) Euleri, L.: Lettres à une Princesse d'Allemagne, Lettre CII, 1761.
(17) 上掲(16) Lettres CIII－CVIII, 1761.
(18) Venn, J.: On the employment of geometrical diagrams for the sensible representation of logical propositions. (Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 4, pp. 47－59, 1880.)
(19) Venn, J.: Symbolic Logic, Burt Franklin, 1881 (reprinted in 1971).
(20) 三野栄治：数学教育における記号表現の問題（Ⅲ），（島根大学教育学部紀要　第9巻，教育科学編，p. 30，1975）

Abstract:

On subsumption of quadrilaterals I wish to offer a consistent classification and its diagrammatical representations.

I think that the subsumption of quadrilaterals in our school mathematics comes from convenience within the limits of the space of squares, rectangles, rhombuses, parallelograms and trapezoids, but it can not keep universal validity. Because "kites" and "isosceles trapezoids" which are familiar shapes to children can not take their positions in point of the subsumption of quadrilaterals in our text-books.

It is now possible to show a consistent classification of the various types of quadrilaterals. The structure consists of four properties:

$$a+c=b+d,\quad DE=EB,\quad \alpha+\delta=\beta+\gamma,\quad \alpha+\gamma=\beta+\delta.$$

Figure 11 shows the organic whole of ten quadrilaterals. And its diagrammatical representations are illustrated in Figure 13, 18, 19 (from the extensive point of view) and Figure 11′, 22 (from the intensive point of view).