島根大学教育学部紀要（教育科学）第9巻　27〜33頁　昭和50年12月

数学教育における記号表現の問題(Ⅲ)

──「論　理　記　号」考（その2）──

三　野　栄　治*

Eiji MINO

Problems in Mathematical Symbolism (III)

──Investigations of the Logical Symbols (2)──

V.　G. ペアノの "logica matematica"

1.　ペアノが，論理における記号化の理念を進展させたのも，彼の数学における記号がもたらす機能への深い考察があったからである。

数学の記号の機能──とりわけ，文の間にある論理的関係の視点から──を分析した結果[17]，ペアノは次のように認識し方向づける。

(1)　論理の記号化は，数論・代数・幾何・微積分などの先行している分野の記号化に劣るものではない。

(2)　論理観念を記号化する利益の第一は，何といっても，記号が生み出す簡潔さと明確さである。

(3)　利益の第二は，数学において論理的関係を表現している自然言語による術語は，およそ1000個あるが，それらの同じ観念を表現するのに，論理の記号は10個あれば済む。それは，ちょうど，すべての数を表わすのにアラビア数字が10個あれば事足りて十分であるのと同じように。

このことは，表意的記号と語の間には一対一対応がないということである。換言すれば，これらの記号は語の略記ではなく，観念の表象であるということである。

(4)　第三に，記号化によって，推論がより容易になる。

(5)　抽象的で単純な観念というものは，自然言語で表現するには不満足になるものであって，したがって記号を用いざるを得ない。記号の手助けによって，想像力を要する一連の議論を構成することが可能となる。

──として，論理学が数学的推論に有用であるだけでなく，哲学上の興味もあるという。

なお，ここに一言付け加えなければならないのは，ペアノの初期の研究・興味は公理主義にあったということである。

その当時までの数学が，自然言語を多く用いた，まだそれほど論理的厳密さのない演繹形式ににあったといえる。それに対して，ペアノは，数学は抽象であって具体的現実的場面から独立して発展させられ得るものである，しかも論理的流れによって。という認識のもとに，数学の体系の理想は数学のどの分野もごくわずかの仮定から厳密に演繹によって導出されるべきものであると考えていたのである。

2.　しかし，ともあれ，かくして成長・進展したペアノの研究領域 "logica matematica" は，次のようなねらいおよび特徴をもったものであるといえよう。[18]

(1)　数学の中にある論理の観念を分類し，記号によってそれらを表象し，その特性あるいは論理的計算の規則を研究することを，目ざす。

(2)　すなわち，数学の演繹において表現されている論理関係や演算を分析して，自然言語による表現から正確な記号に言い換える。

(3)　論理の根本は演繹にある。

(4)　その記号化は観念の表象であって，語の略記ではない。

(5)　とくに，表意的象徴的記号を用いることによって，記号および記号列（式）から観念への復元の滑らかさをねらう。

(6)　自然言語の語用（文体・修辞学的というよりは，むしろ様式化した論理的構造とでもいえるもの）を利用しようとする結語化記法。

(7)　「存在」の問題，すなわち all-some-non の観念を明瞭化し，if-then 形式を強調・大切にする。これは，彼の基本的立場の一つである。

(8)　述語「ϵ」は，クラス理論を構成する出発点となるものであるが，記号 ϵ と $\supset$ の明確な使い分けを要請する。──すなわち，"categorical" な命題と，"conditional" な命題の区別である。

(9)　そして，記号 $\supset$ を生かすために，変数についても "real" なものと，"apparent" なものの区分をはっき

＊ 島根大学教育学部数学教育研究室

りさせる。

(10) さらにまた，メタ言語の必要性と意識化——“latino sine flexione” と名付けられた記述言語の研究。

等である。

3. こういった一連の思想に沿った概念の一つ

$z = \iota a. =. z \varepsilon a$(注11) 〔定義〕

(l'individu x qui forme la classe a)[19]

を導入したが，これはわれわれに重要な示唆を与えるものである。

この概念は，個を表わす名辞を述語化して記述することが可能である，ということを示唆するものであって，たとえば

「5と11の間の素数」

という名辞は

(ιx) (xは素数である$\wedge 5 < x < 11$)

というように言い換えて記述することができる，ということである。

一般的にいえば，

$(\iota x)\ Ax$

という形に記述できる。

ところで，

「$(\iota x)\ Ax$ なるものが存在する」

ことは

「$(\exists y)(\forall x)(Ax \equiv. x=y)$」

に翻訳しうる。[20]

結局，名辞をふくむ文は，「……であるような個 x が存在する」，「すべての個 x は……」という記述への言い換えを可能ならしめる。すなわち，存在記号や全称記号で始まる命題への翻訳（変数の束縛化）を可能にするということである。

VI. G. ペアノの思想から示唆されるもの ——その必要性

1. 学校数学における現行のいわゆる「論理」(中学校1・2学年，高校1学年）は，その思想的基盤として，ヒルベルト＝アッケルマンが創り上げた論理学[21]を映していることは，すでに指摘した。

彼らの論理学は，次の基本姿勢をもつ。

《この命題計算では，命題の論理的構造たとえば命題を述語と主語の間の関係とみるような取り扱いをするのではなく，命題のそれぞれを総体 (Ganze) と見，他の命題との論理的結合を考察しようとするものである。》[22]

すなわち

《「2は3より小さい」，「雪は黒い」というような命題のそれぞれを一つの文字X，Y，Z，U等で表わし，それらの論理的結合 ($\bar{X}$, X&Y, X∨Y, X→Y, X～Y) を考える。》[23]

その結果，これらはまた新しい命題を生成するが，

《結合命題の真・偽は，その結合命題を構成しているそれぞれの命題の真・偽によってのみ定める。》[24]

のであって，

《結合命題の真・偽は，その中に結合されている命題の内容には無関係である。》[25]のである。

ここには，あるがままのものへの分析というよりは，むしろ文法的に構築・理論化して，一つのモデル化を試みるという積極姿勢である。

ところで，文法的なものは，本来的には，意味論的基礎の上に求めるものではない。

ヒルベルト＝アッケルマンは，命題に「真・偽」を導入することによって，すなわち意味論的解釈を賦与することによって，現実からの抽象と，現実への投影をみせようとする。

このヒルベルト＝アッケルマンの理論的論理学は，すでに指摘したように，プロトタイプとしての大きな意義と意味を見出す。しかし，いわゆる“日常論理”との完全な対比はむずかしく，日常性に直ちに投影をはかろうとするとき，そこには飛躍がある。

したがって，もし教育対象として「論理」を必要とするなら，この論理学はそれなりの意義と意味があるが，初学の子ども達にとって認識論的・意味論的に抵抗がある。そこには教育的配慮を必要とするのである。この必要な手だて——それは，G. ペアノの思想や，あるいはB. ラッセルまたはW. V. クワインらの手法から読みとることができる。

いうまでもなく論理主義的な手法と，公理主義的形式主義的立場とは，異なる認識のもとにある。だからといって，木に竹を接ぐという認識ではなく，教育的には，「意味」への方法が段階的にアプローチすることのできる手法も要るのである。そして，むしろこれこそが，「論理」を理解していくための本来的なものであると考えることもできよう。

2. 前節で触れた述語化の問題を考える。

名辞の述語化への手法は，「open sentence」を考えることからはじまる。

open sentence ——それは

「x は本である。」，

「$x=x$」

のように，束縛変数をふくまない文である。

この open sentence は，

- その変数を束縛化して，命題

$\exists x$ (x は本である)，

$\forall x$ $(x=x)$

をつくり出す源になるものである。と同時に，

- open sentence の外延（真であるすべての対象のクラス）を採り上げることによって，集合化が可能になる。

さて，われわれの考察対象が有限個 a_1，a_2，……，a_n に限定されるとき，

$\forall x(Ax)$は $Aa_1\wedge Aa_2\wedge\cdots\cdots\wedge Aa_n$

$\exists x(Ax)$は $Aa_1\vee Aa_2\vee\cdots\cdots\vee Aa_n$

したがって，また

$\neg\forall x(Ax)$ は $\neg(Aa_1\wedge Aa_2\wedge\cdots\cdots\wedge Aa_n)$

$\neg\exists x(Ax)$ は $\neg(Aa_1\vee Aa_2\vee\cdots\cdots\vee Aa_n)$

$\forall x(\neg Ax)$ は $\neg Aa_1\wedge\neg Aa_2\wedge\cdots\cdots\wedge\neg Aa_n$

$\exists x(\neg Ax)$ は $\neg Aa_1\vee\neg Aa_2\vee\cdots\cdots\vee\neg Aa_n$

と同等であるから，連言・選言の全称化・存在化，およびその逆が可能である。

次に，「$\exists x(Ax)$」は「条件Aが存在する」ことであるから，「$\neg\exists x(Ax)$」は「Aが存在しない」ことである。さらに，「Aが存在しない」とは「どれもが非Aである」を意味する。すなわち「$\forall x(\neg Ax)$」。

したがって

$$\neg\exists x(Ax)\equiv\forall x(\neg Ax)$$

同様にして，

$$\neg\forall x(Ax)\equiv\exists x(\neg Ax)$$

である。このことは，全称と存在は，否定を媒体として，意味上の言い換えが可能であることを示している。

これら述語化および述語化されたものは，きわめて重要な意味と意義をもつ。それは，論理学や数学において根源的な役割を担っていることはいうまでもなく，教育的にも大切な場を見開かせるものである。たとえば，言語学的な分析に立ち入るのではなく，述語化を通して，文を様式化(注12)したり記号化したりして論理の骨格を浮かび上がらせ抽象する，あるいは真理値がはっきりする形に置き換えるという作業の重要さ，また形式化されたものの言い換えや翻訳という作業の必要さを，そこに見い出すである。

3. 上述のことに関連して，しばしば混同をみせがちなものに，有名な古くからの話題――しかし，日常の中にしばしば現われるもの

"A"：すべてのFはGである。

"E"：すべてのFはGでない。

"I"：あるFはGである。

"O"：あるFはGでない。

ただし，F，Gは名辞

がある。

これらも，限定記号を用いての記述化が可能である。

"A"：$\forall x(Fx\rightarrow Gx)$

は明らかである。

さて，言語表現の上からは，次の両者はいかにも類似性・並行性があるようにみえる。

"A"：すべてのFはGである。

"I"：　あるFはGである。

したがって，"I"を，"A"から類比させて

"I"：$\exists x(Fx\rightarrow Gx)$

が一見，妥当にみえる。しかし，そうではない。なぜなら，逆に「$\exists x(Fx\rightarrow Gx)$」の意味を検討すれば明らかであるからである。

"I"：$\exists x(Fx\wedge Gx)$

と解釈すべきものである。

"E"，"O"は，"A"，"I"から導出できて，

"E"：$\forall x(Fx\rightarrow\neg Gx)$

"O"：$\exists x(Fx\wedge\neg Gx)$

と言い換えられる。すなわち

$\neg\forall x\ \equiv\ \exists x\neg$

$\neg\exists x\ \equiv\ \forall x\neg$

ということである。

VII. 命題の図表的表象――ベン図への注意

1. ふつう，われわれが

$p\wedge q$,　　$p\vee q$,　　$p\rightarrow q$

（ただし，p，q は命題）

のような命題を考察する場合，これは結合命題であるから，「かつ」，「または」，「ならば」という論理概念そのものを考察対象にし，真理関数として，「かつ」，「または」，「ならば」そのものの値を求める。

それに対して，前節で $\forall x(Fx\rightarrow Gx)$（ただし，F，Gは名辞）のような"A"，"E"，"I"，"O"の記述化を考えたが，その際"混同をみせがち"といった。このことは，上述の記述化でも明らかであろうが，"A"，"E"，"I"，"O"は，F，G，Hなどで示される名辞を「すべて――或る――でない」でまとめた一つの命題であって，そこには「存在」したがって「可能性」が関心事の大きなものになる。

とりわけ，この問題を広く「可能性」の立場で考察しようとし，それを図表化・明瞭化したのが，J. ベンである。しかし，そこには，まだ真理関数として命題を明確に把えようとする立場がない。その立場は，事実上は，J. ベンや，W. S. Jevons にみられると言おうと思えば言えるだろうが，真理値分析の方法は，C. S. Peirce (1902) や J. Łukasiewicz (1920)，E. L. Post (1921)，L. Wittgenstein (1921) を経て，T. Kotarbinski (1929) らによって示された。すなわち，J. ベンの時代よりも時間的なずれがあるとみてよい。

ベン図は，本来的には，"A"，"E"，"I"，"O"に対して，そしてまたそれらの三段論法に対して，実際的に働くものなのである。

2．J. ベン（John Venn）は，命題形式とオイラーの図[26]がもつ特徴（弱点）を指摘しながら[27][28]，自分の図表をつくり出した。

F，G二項の命題（基本命題）の場合，

ア．交わった2円　F，Gでもって情報源を表象する。

イ．各領域が可能性を表象する。[29]

ウ．空（empty）であるクラス（または領域）を示すには，影をつける。[30]

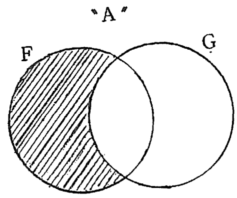
である。すなわち

• 空白の領域[注13]——可能性を示す（未情報）

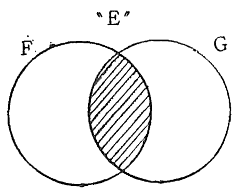
そして

• 影をつけた領域——空のクラス
• 空でないクラスには，×印をつける

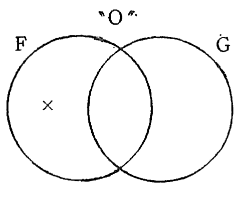
とすれば，よく知られた図表が示される。



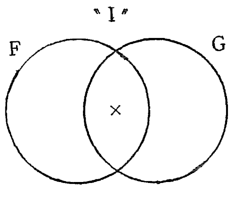
第一図



第二図



第三図



第四図

これらの基本図表は，直ちに次のことを判断させる。

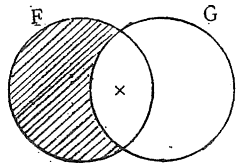
(1)　"E"と"I"は，名辞F，Gの順序を問わない。すなわち，「すべてのFはGでない」ことは「すべてのGはFでない」ことであり，「あるFはGである」ことは「あるGはFである」ことに帰着できる。

(2)　"A"と"O"では，図表上（相対応している領域において）一方が「空」であり他方が「空でない」となっている。それ以外の領域は同じ可能性をもっている。すなわち，互いに他の否定をみせている。

このことは，たとえば"A"を「GでないFは存在しない」と解釈し，「Fが存在して,そのどれもGである」と解釈すべきでないことに対応せされば，"A"が"O"の否定であり，逆に"O"が"A"の否定になっていることが，わかりやすい。

すなわち，「すべてのFはGである」という命題を，Fの存在・非存在を超えたところにおく。

もし，「Fは存在する」を付加して「すべてのFはGである」を考えれば，ベン図では次のようになり，これは「あるFはGである」に置き換えられるものになる。



第五図

"E"と"I"の関係も同様に，通常，互いに他の否定を意味する。[31]

3．上述のことがらを，翻訳すれば，

(1)　$\exists x(Fx \wedge Gx) \equiv \exists x(Gx \wedge Fx)$

$\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx) \equiv \forall x(Gx \rightarrow \neg Fx)$

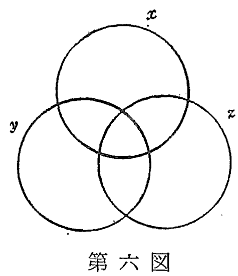
であり

(2)　$\neg \forall x(Fx \rightarrow Gx) \equiv \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$

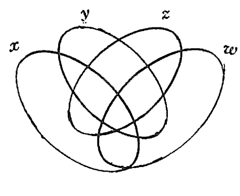
$\neg \forall x(Fx \rightarrow \neg Gx) \equiv \exists x(Fx \wedge Gx)$

である。

4．J. ベンは，上の二項関係や三項関係（三段論法）だけでなく，四項およびそれ以上の関係の図表化，すなわち一般化を考察し工夫をなそうとしているが，そこには苦労がしのばれる。



第六図



第七図

VIII．結　び

記号論理学は，ヨーロッパ精神風土を醸し出している言語（ヨーロッパの）に密着し，そこから抽象された形式を，表象の基礎としているものである。

それらの国々では，とりわけ，all-some-non と if-then が，その文法的・意味的重要さをもつことはむろんのこと，使い手にとっても日常的なものといえる。記号論理学は，この日常的に根ざしたものから，学的に論理骨格を抽象し明確にし，しかも扱いやすさをめざしているといえよう。

日常文の言い換えとか様式化そして記号化などが，そこに必要で，重要しかも意義ある課題となる。——この抽象化，それはわれわれに事柄の内包的な側面を問題に

していることを教え，かつ意識化を要請する。

また，記号化して考えることは，同時に，適用の広さ・拡がりを課題とすることで，それはわれわれに，力強さと明瞭さを認識させる。――すなわち，これは一般化・一般性の問題で，われわれにとって外延的な側面を示唆するものである。

このように考えれば，以上述べてきた“教育的配慮”は，何ら配慮に位置づけられる程度のものでなく，むしろ本来的教材として位置づけられうるものを含んでいる。数学的な考えに本質的に迫る働きの一つと考えても過言ではないであろう。

〔本題（その1）への補〕

(1)　否定記号の一つに波型～（たとえば，$\sim p$ という記法）がある。これは，non の頭文字 n の変形であると考えられる。また，否定命題 $\bar{B}$ (not-B) という記法は，すでにC. S. Peirce (1867) も用いている。

(2)　記号Ↄは，J. D. Gergonne に生起する，とペアノ自身が述べている (1908) が，その用法は条件法の意味ではない。J. D. Gergoune の一連の記号 H, X, I, C, Ↄ の中の一つである。[33]

注

(注11) 記号 ℩ は，ギリシャ語 ἴσος の頭文字イオータを天地逆にしたものである。

(注12) 様式化とは，次のような言い換えの手続きである。

「すべての人間は死すべきものであるかまたはすべての人間は死すべきものでない」において，いま「すべての人間は死すべきものである」を p とおけば，与えられたもとの文の論理骨格は「(p) かまたは (p でない)」(ただし，強調のため括弧をつけた) である。論理学では，さらに対象言語を用いて「$p \vee \neg p$」である，とするのがふつうである。

さて「$p \vee \neg p$」は，国語的には (pでない)に対して ($p\neg$) とせずに ($\neg p$) としたのは，記号論理の慣習（規約・象徴化）であると同時に，文の様式化が働いた結果である。また，修辞的にきびしく求められるなら，(pでない) は（すべての人間は死すべきものであるでない）となるから，（すべての人間は死すべきものでない）を (pでない) と言い換えることは，そこに様式化が入ったということにもなろう。

なお，この文の様式化の問題は，われわれより以上に，英語などの言語において論じられることがある。たとえば，「to be or not to be」では直ちに「$s \vee \neg s$」と置きかえられるが，「all men are not mortal」では，「not all men are mortal」を母体としたところから「p$\vee\neg$p」が出る。したがって，「not all men......」は，様式化されたものである。

(注13) 2円の外側の領域も，もし存在するなら，対象とする。

引　用　文　献

(17) Peano, G. : Importanza dei simboli in matematica.
(Scientia, XVIII(1915), Opere scelte, vol. I(1957))
(18) 三野栄治：論理における記号化：G. ペアノの思想とその示唆するもの，
(数学教育学研究紀要，2 (1975))
(19) Peano, G. : Formules de logique mathematique.
(Revue de mathématique, VII(1900-1)), p. 35
(20) Quine, W. V. : Methods of Logic, Holt-Rinehart & Winston, 1950. 3rd ed., 1972, p. 232
(21) Hilbert, D. & W. Ackermann : Grundzüge der theoretischen Logik, Springer, 1928. 2nd ed., 1938. 3rd ed., 1949.
(22) 上掲(21), p. 3.
(23) 上掲(21), p. 3.
(24) 上掲(21), p. 4.
(25) 上掲(21), p. 4.
(26) Euleri, L. : Lettres à une Princesse d' Allemagne, Lettres 102-105, 1761.
(27) Venn, J. : On the employment of geometrical diagrams for the sensible representation of logical propositions. (Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 4(1880)), pp. 47-59.
(28) Venn, J. : Symbolic Logic, Burt Franklin, 1881. reprinted, 1971.
(29) 上掲(28), p. 25.
(30) 上掲(28), p. 122.
(31) 上掲(20), p. 85.
(32) 上掲(27), (28)
(33)Gergonne, J. D. : Essai de dialectique rationnelle.
(Annales de mathématiques pures et appliquées, VII(1816-7))

Abstract :

We know that the logic we use now in our schools is based on the idea of D. Hilbert and W. Ackermann.

Their theory say : "In dem Aussagenkalkül wird auf die feinere logische Struktur der Aussagen, die etwa in der Beziehung zwischen Prädikat und Subjekt zum Ausdruck kommt, nicht eingegangen, sondern die Aussagen werden als Ganzes in ihrer logischen Verknüpfung mit anderen Aussagen betrachtet. "(Hilbert,D. & W. Ackermann : Grundzüge der theoretischen Logik, Springer, 1928. s. 3) and"... Richtigkeit order Falschheit einer Aussagenverknüpfung nur von der Richtigkeit und Falschheit der verknüpften Aussagen, nicht aber von ihrem Inhalt abhangig ist. "(ibid. s. 4)

Then their theory can be signified by the logic that is syntactically constructional or theoretical one.

But syntactical questions are not come out of semantic affairs. Then as the result of introducing the truth-function to the components of connectives, they try to give the connective a interpretation on semantics. Now, its production in this manner should be found out senses and significances as a simple logic (or prototype).

For beginners, this logic, nevertheless, makes often to find difficulty in realizing and corresponding, that is, it has a distance of projection into daily logic. Hence we must know that students will make a bid for support in the case to learn such a logic.

Some steps to understanding logic we shall read out of the thoughts of G. Peano (and/or out of a way of some logisticians too). For an intention like this, one will say that there are heterogeneous studies between logistic and formalistic one. Certainly there are. They are, however, no quite incongruous in a situation of instruction, rather to be laid claim to students.

We shall believe that this intention has a inevitability in the situation of logical instruction.

To put it in the concrete, there are the following :

(1) to describe singular terms to the form $(\imath x)\ Fx$.
i. e. the object — open sentence Fx (of which the predicate represented by F) — to quantify Fx.

(2) to make possible a translation through negation between universal quantification and existential quantification.

(3) to come to the front and to do abstracting the logical physique, through stylizing and /or symbolising of statements. — this task makes us to become aware of the intensive aspects of mathematical thinking.

(4) to manage the schematized or symbolized statements. — this work makes us to open our eyes to the extensive aspects of mathematical thinking.

In addition to the above, we must point out how to operate the logical diagram of J. Venn. His diagrams were occured in examınation (in 1880) of Eulerean representation (*Lettres à une Princesse d'Allemagne, Lettres 102-105, 1761*).

Venn diagrams actually fulfill its function in regard to categorical propositions ("A", "E", "I", "O") and their syllogism, not to truth-function.