

数学教育における記号表現の問題(Ⅱ)

—「論理記号」考(その1)—

三 野 榮 治*

Eiji MINO

Problems in Mathematical Symbolism (II)

— Investigations of the Logical Symbols (1) —

はじめに

いわゆる「論理」が、学校数学としての話題になってから十分な日時が経つ。教材として具体化されてからでも、かなりの時間を経ている。「論理」についての著書も多くみうけられ、また、教室での取り扱い方もいろいろな工夫がみられる。論理の内容についてはむろんのこと、論理の記号についての由来やその用法などについても、ていねいな指導・教育的配慮がなされるようになってきている。しかし、残念なことに、まだ不的確あるいは妥当さを欠く点もみうけられるようである。

そこで、この論文では、学校数学において現在取り扱われている《論理記号》について、それに限定して、その由来および意味を述べてみたい。とくに、記号化の思想をペアノから読みとることによって、短絡的に記号の事実についてまとめることにする。ペアノの思想を採り上げるのは、記号化における数学者としての独創性のおもしろさもさることながら、現在の我々が利用している論理記号の源流を、ペアノにみるからである。

なお、ペアノがすぐれた教育者であったといわれる由縁も、彼の数多くの論文から伝わってきて、うなずけるものがある。

I. 記号—形式言語化への覚書き

論理学は、ひじょうに入り組んだ長い歴史を背負っている。それは、むずかしさの故であり、新しい問題が発見されるからである。

論理学の歴史的流れに、大きくみて、二つの系統がみられる。その一つは、アリストテレス（あるいは、ユークリッドも）に始まる流れで、ブール (Boole, G.), シュレーダー (Schröder, E.), (ライプニッツも) と続くところのもの、すなわち形式的・演繹的な推論に視点を

おくものである。それに対して、もう一つは、アルキメデスに源を見出す思想で、ボルツァノ (Bolzano, B.), デデキント (Dedekind, R.), カントール (Cantor, G.) と続くものである。

アリストテレスは、主として自然言語によって研究を進めたのに対して、ブールは“形式的”言語—代数学の形式を真似たところの言語の形式化—で試みた。ブールの手法は、純粋に代数的であって、したがって、ここに実質的な数学的論理学が進展しはじめたと考えられる。

自然言語の代りに、形式化された言語—人工的な言語を用いはじめたときに、論理学の第一のしかもひじょうに大きな進歩がなされるといえるのである。

1. ブールは、思考の一般的な規則が代数学の法則とひじょうによく類似しているのを観察するところから始めた。すなわち、論理の代数化を指向した。ブールは、「クラス」の概念をとり上げ、それを文字(変数)で表示する。それは、内包の関係ではなく外延の論理的关系を扱うものである。

たとえば、式 xy は「クラス x とクラス y の両方に属するもののクラス」を表わすもので、

x : 男, y : 女, z : ヨーロッパの, とすれば、

$$z(x+y) = zx+zy$$

は、「ヨーロッパの男と女」は、「ヨーロッパの男とヨーロッパの女」と同じことである、という例を挙げている。

彼によれば、したがって、 $xx = x$ は、変数 x のどんな値に対しても真である(たとえば、'good, good' というのは 'good' というのに論理的に同じであって、 $xx = x$ は《不恰好で有用でない重複語》⁽¹⁾である)。なぜなら xx は、クラス x の両方に属するもののクラスであるから、それはクラス x を形成する。ところが、代数学では $x^2 = x$ はつねに真であるとはいえない。しかし、もし0と1の世界に限って考えれば、

* 島根大学教育学部数学教育研究室

$x^2 = x$ はつねに真である。

このようなことから、彼の論理代数は、0と1の記号によって進めていくのであるが、彼の記号は constant-symbol であり、constant-class として把握されうるものであろう。ブールによれば、“1”は「すべてのものから成るクラス」であり、“0”は「空(くう)のクラス」である。ただ、この「空のクラス」の存在の認識は容易なものではなかったであろうと想像される。

さて、ブールは論理代数を発展させて、論理的和と論理的差を導入している。

$x-y$: 「クラス y に属するものを除いた、クラス x に属するもののクラス」

$1-x$: 「もし x が人間のクラスなら、 $1-x$ は人間でないもののクラス」

また、数学における等号とまったく同じような意味で、論理においても“=”を扱う。すなわち、

$$xx = x \quad (\text{または } x^2 = x)$$

$$x^2 - x^2 = x - x^2$$

$$0 = x - x^2$$

$$\text{i. e. } x(1-x) = 0$$

これは、アリストテレス以来知られているところの矛盾律を示す。

このように、ブールの方法は、純粋に代数的であった。

2. 一方、フレーゲ (Frege, G.) は、独自の立場にあって (ブールやその後継者達の研究を知らなかったといわれている)、“数論のすべてを論理規則に基づかせることの可能性”を明らかにすることを考えていた。

数論が論理的前提の上に建てられるものであることを確信するには、どうすればよいのだろうか——このことを成すためには、どのようなギャップももたない“完全な証明”が与えられる必要があるが、この努力中に、フレーゲはいくつかの重要な考えに到っている。なかでも、自然言語から起こるむづかしさから、記号使用の必要性を明らかにしている。ただ、フレーゲの記号化は、ブールの場合とは異なり、数学の上にそのモデルを求めてはいない、ということである。なぜなら、フレーゲの立場は、論理が数論の基礎を築かせたいためのものであるから、数学における記号を援用することは、記号のあいまいさを導き入れ、循環論をも起こさせるからである。この数学的方法を用いなかったことは、《論理問題の固有の性質が、よりよく理解されるのに役立つ》⁽³⁾、イギリスのラッセル (Russell, B.) にひじょうに大きな影響を与えた。

ただ、フレーゲの創り出した記法が、幾何図形的な“二元記法”であり、また、むづかしくもあったため、人気を得なかった。しかし、フレーゲは、《現代的な論

理学者で、論理の根元にある問題の発見と解決に、ひじょうな明敏さを示した》⁽⁴⁾のである。

3. ライブニッツ——ブール——シュレーダーの研究が、イタリアの数学者ペアノ (Peano, G.) に影響を与えた。

ペアノは、彼の考案した記号—形式言語でもって、数学の中にある論理の観念を分類し、記号によってそれらを表象し、その特性あるいは論理的計算の規則を研究することを旨とした。

今日、論理学において我々が使用している記号—形式言語は(残念なことに、統一されてはいないが)ペアノによって創り出されたものから導かれたものである、と、いってよい。記号—形式言語の観点からは、ペアノは重要な地位を占めているのである。

ところで、前述のように、フレーゲの思想——数学は、論理でもって始められるところの一つの体系(狭い意味で、数学の各分野が論理の上に基礎づけられる)として示されるべきである——を、より確かな形で実行しようとしたのはラッセルであるが、その大著『Principia Mathematica』(ホワイトヘッドとの共著)では、またペアノの記号—形式言語を積極的に採用しているのである。その序文に

《記法に関しては、可能なかぎりペアノに従うことにし、必要に応じて、彼の記法に補足してフレーゲやシュレーダーの記法にも従った》とある。

4. さて、1900年代初期には、かくして、数学(とくに数論)と論理とのかかわりがいろいろ話題となり、“数学的論理学”と“哲学的論理学”の関わりは如何、対立するものか、というような議論が活潑になされている。

ヒルベルト (Hilbert, D.) は、1904年に「論理」の問題に足を踏み入れたが、そこで次のように述べている。

《数論は、しばしば論理の一部であると考えられている。伝統的な論理の基礎理念は、通常、数論の基礎を確立するという問題が前提条件とされている。しかし、我々が注意深くみれば、論理規則の伝統的な説明の中に、すでに数論のある基礎観念が用いられているのを見出す。たとえば、集合の観念や、ある程度の数観念が。かくして、もしパラドックスが避けられるならば、論理の規則と数論の規則の部分的同時発展が求められる。そして、一つの輪の中に帰ってくる我々自身を見出すのである。》⁽⁴⁾

ヒルベルトによって、数学の方法によって扱われる論理学すなわち数学的論理学が、明瞭に大きな姿を現わした。命題論理だけでなく、述語論理が explicit に体系的に取り扱われ——ここに“現代的”論理学が幕開く

——しかも排中律を前提とした認識、すなわち二値論理学で、公理的方法によって計算が進められるところに、彼の思想がある。

それに対して、ある種の認識論的問題を内にふくむ論理学（哲学者が扱う論理学とでもいえよう）を、前述のように“哲学的論理学”と呼ぶことにする。

ところで、「いかなる命題も、真か偽かのいずれか一方だけである」これが二値原理であり、この二値原理の上に構築される論理学が二値論理学である。この二値論理学は、学問化されている論理学の中での最もシンプルな論理学である。

この原理——排中律や二重否定の認識をめぐる、直観主義論理学とか多値論理学などの思想が形成されていた。ブラウワー（Brouwer）やハイティング（Heyting）あるいはウカシェヴィッツ（Łukasiewicz）らが、それである。そして、さらに、意味論的視点とか構文論的視点等々が加わって、まさに入り組んだ学派が存在している。

二値論理学は、学問化された論理学の中で、最もシンプルなモデルであると述べたが、我々の日常生活感覚からは、排中律の成立する場面はそれほどすべてであるとはいえない。対立学派の思想がそれを示している。したがって、排中律の認識は、日常感覚的には《積極的な知識》⁽⁶⁾ であるというのも、うなずけることである。

一方、日常性とは別に、何かを学問として組織化するには、その第一歩として、不定性をできるだけ排除して、条件を理想化する・単純化することなどが、まず採られるであろう。すなわち、シンプルなモデルを構成することがその第一歩であって、まずそれについて考えてみるかなされる。

学校数学におけるいわゆる「論理」の教材化と指導理念にとっては、上述のことは見逃すことのできない問題点である。

II. 記号—形式言語の思想——ペアノの発想から

1. ペアノ（Giuseppe Peano, 1858～1932）は、イタリアの数学者で、1881年から1931年にわたって200編以上の作品を発表しているが、記号論理の研究は1888年から発表されはじめた。それは、シュレーダーの論文『Der Operationskreis der Logikkalkuls (1877)』にペアノが喚起されたのがそもそもで、シュレーダーの記法が論理の記号と数論の記号との間に混乱をおこしていたことによる。ペアノは、シュレーダーの記号 \times , $+$, A_1 (A の否定), 0 , 1 をそれぞれ \cap , \cup , $\neg A$ （または \bar{A} ）, \circ , \otimes に置き換え、さらに記号 $<$ を導入して、 $A < B$:「 A は B である (ogli $A \grave{e} B)$ 」(ただし、 A, B はクラス)としている。(注1)

1888年のこの作品⁽⁶⁾は、彼の“Logica Matematica”の中では、それ以後への大きなステップとみることができ、記号—形式言語の面での彼独自の考えが顕著に表出されているものである。

いくつかを抜き出してみよう。

《 $A \cap B \cap C$ を記号化して、 $A \cap B \cap C$ （または簡単に ABC ）と書く。記号 \cap は、 \cap と読む。》

《 $A \cup B \cup C$ を記号化して、 $A \cup B \cup C$ と書き、記号 \cup は、 \cup と読む。》

「 \cap 」、「 \cup 」はそれぞれイタリア語で、「そして」、「または」の意味である。記号 \cap , \cup は「 \cap 」、「 \cup 」と読ませられるだけでなく、形態的になかなか連想力の強い象徴的記号であるといえる。

《 \otimes :「実在しているもの全体（クラス）」を表示する記号で、*tutto* と読む。

\circ : 存在物がごとく無いクラスを考える必要があるときは、記号 \circ で示し、*nulla* と読む。

《 \otimes と \circ の用例

$$\begin{aligned} A \otimes &= A, & A \cup \circ &= A \\ A \circ &= \circ, & A \cup \otimes &= \otimes \\ A \cap \neg A &= \circ, & A \cup \neg A &= \circ \\ \neg \circ &= \otimes, & \neg \otimes &= \circ \end{aligned}$$

》(注2)

次に、記号 $<$ については、翌1889年の作品では \circ に変わるのであるが、これについて次のような使い方がなされている。

《 $(\langle 1 \rangle) < (\langle 2 \rangle)$

‘interi’ $<$ ‘razionali’

$$AB < A, \quad A \cup B > A$$

$$\circ < A, \quad \otimes > A$$

$$(A = B) < (AC = BC),$$

$$(A = B) < (A \cup C = B \cup C)$$

$$(A = B) < (\neg A = \neg B)$$

$$A < B \text{ は、} AB = \circ \text{ に等しい。}$$

》(注3)

2. 『Arithmetices principia, nova methodo exposita (1889)』の序文を、少し長いが引用してみよう。この中に、ペアノの記号—形式言語に対する思想がよく表われていると思われる。この論文はラテン語で書かれたものである。

《数学の基礎に関する問題は、多年取り扱われているが、まだ満足のいく解決をみていない。その困難さは、日常言語のあいまいさから主として起こる。このため、我々が用いることばを注意深く考察することは、最大の関心事である。私はこのことをなそうと決意した。そして、数論への応用をもった私の研究の結果をこの論文に記してある。

私は、数論の基礎に生起する観念すべてを記号によって表示する。そして、ちょうどそのように、すべての命題もこういった記号で明記される。記号は論理か数論かにつきものである。ここに出てくる論理記号は約10個あるが、すべてを必要とはしない。これらの記号やその固有な使い方は、日常言語のはじめの部分によって意味づけられる。私は、ここで、これらの理論を十分に示そうというのではない。数論の記号は、それらが生起するときに説明される。

この記法でもって、すべての命題はその形式がわかり、代数におけるような正確な扱いをすることができる。そして、そのように表現された命題から他の命題が導けるのである、ちょうど代数方程式の解決に似ているやり方によって。このことが、この論文を書くに到った主な理由である。

論理の記号とともに他の記号を用いることによって表現される数論記号は、我々が定義することのできる観念であるということを示している。(中略)

この論文では、私は他の人達の研究を利用した。II, III, IVに含まれている論理の記法や命題は、いくつかを除いて、とくにブールの成果による。(中略)

私のこの小冊子は、新しい方法の一つの例であるともてほしい。こういった記法によって、多くの命題を述べたり証明したりすることができる。しかし、他の理論を取り扱うためには、新しい記号を採用することが必要である。しかしながら、どのような科学の命題も論理のこれらの記号だけによって表現されうると、私は信ずる、ただし、科学の固有性を明記するところの記号が付け加えられる限りににおいて。》

そして、この序文に引き続いて、記号が一覧に表されている。(第1表)

ここには、記号 $<$ を発展させたところの命題の間の関係記号としての記号 \supset 、そして新しい記号 e (ペアノは、 e と \supset の区別にくりかえし注意をうながしている) と Λ を導入し、さらにいくつかの表現記号を導入している。

ペアノの考えは、論理を分析することは、結局、論理観念すべてを表示することが可能なところの象徴記号を構成することである、ということである。規約性の強い記号を構成するのではなく、グラフィックで象形文字的記号を意図しているのである。それは、論理的観念への復元の滑らかさを強調することにもなる。

ペアノにおいて注目しなければならないのは、“ペアノの象徴記号は、単なる規約的記号でも、短縮・簡約の記号でも、また速記的なためのものでもない”ということである。換言すれば、「words」ではなく「ideas を表示するもの」であるといえよう。そして、観念とその

SIGNORUM TABULA

LOGICAE SIGNA

Signum	Significatio	Pag.
P	<i>propositio</i>	VII
K	<i>classis</i>	X
\cap	<i>et</i>	VII, X
\cup	<i>vel</i>	VIII, X, XI
	<i>non</i>	VIII, X
Λ	<i>absurdum aut nihil</i>	VIII, XI
\supset	<i>deducitur aut continetur</i>	VIII, XI
$=$	<i>est aequalis</i>	VIII
ε	<i>est</i>	X
[]	<i>inversionis signum</i>	XI
\exists	<i>qui vel [ε]</i>	XII
Th	<i>Theorema</i>	XVI
Hp	<i>Hypothesis</i>	》
Ts	<i>Thesis</i>	》
L	<i>Logica</i>	》

ARITHMETICAE SIGNA

Signa 1, 2, ..., =, >, <, +, -, \times
vulgarem habent significationem.
Divisionis signum est /.

Signum	Significatio	Pag.
N	<i>numerus integer positivus</i>	1
R	<i>num. rationalis positivus</i>	12
Q	<i>quantitas, sive numerus realis positivus</i>	16
Np	<i>numerus primus</i>	9
M	<i>maximus</i>	6
M	<i>minimus</i>	6
T	<i>terminus, vel limes summus</i>	15
D	<i>dividit</i>	9
Q	<i>est multiplex</i>	9
π	<i>est primus cum</i>	9

SIGNA COMPOSITA

$<$	<i>non est minor</i>
$= \cup >$	<i>est aequalis aut maior</i>
$\exists D$	<i>divisor</i>
$M \exists D$	<i>maximus divisor</i>

(第1表)

表示記号の間には、対応が保持されるように配慮されていることであり、数学命題を簡潔で正確な形に表現することが可能であるとみていることである。

3. 表現記号にとどまることなく、記号の結語法(構文法)を導入して、体系化・演算記号化をはかっている。

(1) 論理の基本的な観念としては、記号

 $\varepsilon, \supset, =, \cap, \cup, -, \Lambda$

によって表現されるものを探る。この基本概念というのは、それ以上単純な観念で表現することのできないもの

(もちろん記号的にも)であって、したがって、自然言語で述べられなければならない。それは例を示すことによって明確化されなければならないとしている。

① a, b, \dots, x, y, z : 任意の命題

② 定式する際、カッコまたは点 $\cdot, \dot{\cdot}, \ddot{\cdot}, \dots$ を打つことによって部分を示す。

たとえば, $ab \cdot c, a \cdot bc, ab \cdot cd,$

$ab \cdot cd : e \cdot fg$ は,

$(ab)c, a(bc), (ab)(cd), [(ab)(cd)][e(fg)]$ と同値である。

③文字 K : 「クラス」を意味し、それを象徴する。

④ a は K (の 一 つ) であるとす。

$x \in a$: 「 x は a である」を意味し、それを象徴する。(注4)

⑤ p, q は、変項 x, \dots, z をもつ命題であるとす。

$p \supset x, \dots, z q$: 「 x, \dots, z が何であっても、それらが条件 p をみたす限りにおいて、それらは条件 q をみたす」ことを意味し、それを象徴する。なお、記号 \supset の添字 x, \dots, z は、あいまいさの危険がないときには、省略して $p \supset q$ と表わす。(注5)

⑥ $p q$: 「命題 p, q の同時肯定」を表示する式。

(2) いくつかの用例

$$\cdot 7 \in \mathbb{N}p \quad \cdot 12 \in \mathbb{N} \times 4$$

$$\cdot a \in \mathbb{N}p \cdot \supset \cdot (a-1)! + 1 \in \mathbb{N} \times a$$

「 a が素数なら、 $(a-1)! + 1$ は a の倍数である」(ウイルソン)

ア) 記号 \supset は添字としての a を、暗黙のうちにもっている。

イ) 3つの部分「前提」、「演繹の記号」、「帰結」のから成り立つもので、全体で意味をもつ。

$$\cdot a \in \mathbb{N}p \cdot b \in \mathbb{N} \cdot b^2 \in \mathbb{N} \times a \cdot \supset \cdot b \in \mathbb{N} \times a$$

ア) 記号 \supset は、 $\supset_{a,b}$ のことである。

イ) 「前提」は、3つの命題 $a \in \mathbb{N}p \cdot b \in \mathbb{N} \cdot b^2 \in \mathbb{N} \times a$ の同時肯定である。

$$\cdot a \in \mathbb{N} : x \in \mathbb{N}p \cdot \supset_x \cdot mp(x, a) \in \mathbb{N}_0 \times 2 : \supset \cdot a \in \mathbb{N}^2$$

ア) これは、「前提」が、演繹記号をふくむ例である。

イ) 文字 a についての条件を表現している命題であって、文字 x についての命題ではない。

記号 \supset の正しい用法は、上の例でわかるように、変項の使用と密接につながっている。

なお、次のようにも述べている。

《 $a \times b = b \times a$ という表現は、意味をもたず不完全である。そこに使われている文字 a, b の意味づ

けをしなければならない。すなわち

$$a \in \mathbb{N} \cdot b \in \mathbb{N} \cdot \supset \cdot a \times b = b \times a$$

という形の全体でもって意味をもつものである。帰結にあたる $a \times b = b \times a$ だけではいけない。なお、 a, b は正の整数に限る必要はない。有理数、無理数、複素数としてもよい。》

(3) ε と \supset の関わりについて。

$$a \in K \cdot \supset : x, y \varepsilon a \cdot = \cdot x s a \cdot y \varepsilon a \quad [\text{定義}]$$

によって、 $x, y \varepsilon a$ という記法を導入する。 $(x, y, z \varepsilon a$ についても同様)

さて、 $a \supset b$ を次のように定義する。

$$a, b \in K \cdot \supset : a \supset b \cdot = : x \varepsilon a \cdot \supset_x \cdot x \varepsilon b$$

すなわち、 $x \varepsilon a \cdot \supset_x \cdot x \varepsilon b$ において、記号 \supset の添字 x はこの命題においてまぎらわしさがないので、 x を省略して、 a と b の間の関係を $a \supset b$ と表示するのである。

記号 \supset が、命題の間に使われているときは「導く(演繹する)」

記号 \supset が、クラスの間に使われているときは“……に含まれる”

次に、

p_x が変項をもつ命題であるなら、「条件 p_x をみたす x のクラス」を $\overline{x \varepsilon p_x}$ で表示する。

いま $a = \overline{x \varepsilon p_x}$ とおけば、 a はクラスであって、命題 p_x は $x \varepsilon a$ と同値である。すなわち、

$$x \varepsilon a = p_x$$

$$\text{したがって } \overline{x \varepsilon (x \varepsilon a)} = a$$

したがってまた、 $a \in K \cdot \supset \cdot \overline{x \varepsilon (x \varepsilon a)} = a$

$x \varepsilon$ の上につけられた $\overline{\quad}$ は、ちょうど関数において、逆関数を考えるのと同じ役目をはたしている。

さて、 $a \cap b$ (または簡単に ab) によって「 a と b の同時実在のクラス」を表示するものとすれば、記号 \cap は結合詞「そして」にあたるものであるが、次のように定義する。

$$a, b \in K \cdot \supset \cdot ab = x \varepsilon (x \varepsilon a \cdot x \varepsilon b) \quad [\text{定義}]$$

いいかえれば、

$$a, b \in K \cdot \supset : x \varepsilon ab \cdot = \cdot x \varepsilon a \cdot x \varepsilon b$$

これは、クラスの“論理積”が、命題の“同時肯定”によって定義されるところに特色がある。

なお、 ε と \supset の関わりについては、 ε は目的語を伴わないものであるのに対して、 \supset は目的語を伴うものである、という見方もできる。

(4) 記号 Λ について。(注6)

$$a \in K \cdot \supset : a = \Lambda \cdot = : b \in K \cdot \supset_b \cdot a \supset b$$

[定義]

によって、 $a = \Lambda$ が定められる。

注目に値するのは、この定義のしかたそのものはいくらまでもないが、記法的にも「 $= \Lambda$ 」でままとまった単

(第2表)

	否定記号	連言記号	選言記号	含意記号	同等記号	全称記号
Peano	$\neg p (\bar{p})$	$p \wedge q (pq)$	$p \vee q$	$p \supset q$	$p = q$	$\exists x$
Russell	$\sim p$	$p \cdot q (pq)$	$p \vee q$	$p \supset q$	$p \equiv q$	$(x) \cdot$
Whitehead-Russell	$\sim p$	$p \cdot q (pq)$	$p \vee q$	$p \supset q$	$p \equiv q$	$(x) \cdot$
Hilbert (1)	\bar{p}	$p \& q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \infty q$	(a)
Hilbert (2)	\bar{p}	$p \& q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$\begin{matrix} p \infty q \\ (\rightleftharpoons) \end{matrix}$	(x)
Hilbert-Ackermann (1)	\bar{p}	$p \& q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$\begin{matrix} p \infty q^{2)} \\ (\rightleftharpoons, \leftrightarrow) \end{matrix}$	(x)
Łukasiewicz	Np	$K p q$	$A pq$	$C pq$	$E pq$	$\Pi x^{3)}$
Gödel	\bar{p}	$p \& q$	$p \vee q$	$p \supset q$	$p \infty q$	(x)
Heyting (1), (2)	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \supset q$	$p \supset \subset q$	(x)
Hilbert-Bernays	\bar{p}	$p \& q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$\begin{matrix} p \sim q \\ (\rightleftharpoons, \leftrightarrow) \end{matrix}$	(x)
Gentzen	$\neg p$	$p \& q$	$p \vee q$	$p \supset q^{1)}$	$p \supset \subset q$	$\forall x$
Quine	$\sim p$	$p \cdot q$	$p \vee q$	$p \supset q$	$p \equiv q$	(x)
Kleene (1)	\bar{p}	$p \& q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \equiv q$	(x)
Carnap	$\sim p$	$p \cdot q$	$p \vee q$	$p \supset q$	$p = q^{5)}$	(x)
Hilbert-Ackermann (2)	\bar{p}	$p \& q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$\begin{matrix} p \sim q \\ (\rightleftharpoons, \leftrightarrow) \end{matrix}$	(x)
Tarski (1)	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	Π_x
Tarski (2)	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\bigwedge_{x,y,\dots}$
Schütte	\bar{p}	$p \& q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \equiv q$	(x)
Rosser	$\sim p$	$p \& q$	$p \vee q$	$p \supset q$	$p \equiv q$	(x)
Bernays	\bar{p}	$p \& q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	(x)
Ackermann (1) (2)	\bar{p}	$p \& q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	(x)
Suppes	$\neg p$	$p \& q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	(x)
Church	$\sim p$	$p q$	$p \vee q$	$p \supset q$	$p \equiv q$	$(\forall x) \text{ または } (x)$
Mostowski	$\sim p$	$p \& q$	$p \vee q$	$p \supset q$	$p \equiv q$	(x)
Goodstein	$\neg p$	$p \& q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	(x)
Christian	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$(\forall x)$
Hilbert-Ackermann (3)	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\forall x$
Skolem		$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \leq q^{6)}$	$p = q$	$\bigwedge x$
Scholz-Hasenjaeger	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\forall x$
Hermes (1)	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	\bigwedge_x
Kleene (2)	$\neg p$	$p \& b$	$p \vee q$	$p \supset q$	$p \sim q$	$\forall x$
Freudenthal	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\bigwedge x$
Hermes (2)	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\bigwedge x$

註 1) Studii di logica matematica. 1897

2) $\dot{a}q$: metalogical symbol (\leftrightarrow : logical connective)

3) Tow-Valued Logic. 1920

存在記号	出典
$\exists a^1)$	Arithmetices principia, nova methodo exposita. 1889, その他
$(\exists x) \cdot$	Mathematical logic as based on the theory of type. 1908
$(\exists x) \cdot$	Principia Mathematica. 1910 (2nd ed., 1957)
(Ea)	Die logischen Grundlagen der Mathematik. 1923
(Ex)	Die Grundlagen der Mathematik. 1927
(Ex)	Grundzüge der theoretischen Logik. 1928
$\exists x^3)$	Elements of Mathematical Logic. 1929 (translated from Polish,) (reprinted, 1966)
(Ex)	《Monatsheft für Math. und Phys. Bd. 37》1930
(Ex)	《S-B preußischen Akademie der Wiss. II.》1930 Mathematische Grundlagenforschung Intuitionisms Beweistheorie. 1934
(Ex)	Grundlagen der Mathematik. 1934
$\exists x$	《Math. Zeitschrift. Bd. 39》1935
$(\exists x)$	《Journal of Symbolic Logic. 1》1936, その他
(Ex)	《Math. Ann. Bd. 112》1936
$(\exists x)$	Logical Syntax of Language 1937
(Ex)	Grundzüge der theoretischen Logik. 1938
\sum_x	《Journal of Symbolic Logic. 6》1941
$E_{x,y,\dots}$	Introduction to logic and to the methodology of deductive sciences. 1941
(Ex)	《Math. Ann. Bd. 122》1950
(Ex)	Logic for Mathematicians. 1953
(Ex)	《Journal of Symbolic Logic. 19》1954
(Ex)	《Math. Ann. Bd. 131》1956, 《Journal of Symbolic Logic. 21》1956
$(\exists x)$	Introduction to Logic. 1957
$(\exists x)$	Introduction to Mathematical Logic. 1956
(Ex)	《Journal of Symbolic Logic. 23》1958
$(\exists x)$	《Journal of Symbolic Logic. 23》1958
$(\exists x)$	Introduction to Logic and Sets. 1958
$\exists x$	Grundzüge der theoretischen Logik. 1959
$\forall x$	Investigations on a comprehension axiom without negation in the defining propositional function. 1959
$\exists x$	Grundzüge der Mathematischen Logik. 1961
\forall_x	Einführung in die Mathematische Logik. 1963
$\exists x$	Mathematical Logic. 1967
$\forall x$	The Language of Logic. 1966
$\forall x$	Introduction to Mathematical Logic. 1973

4) \rightarrow : Sequenz を意味する補助記号, Υ : richtige Aussage, 人: false Aussage.5) \equiv : Sentence の場合.6) atomic proposition の場合は. $x \in y$

一記号と考えられることである。

また、記号 \vee を導入して

$$a \in K, \circ \therefore a = \vee. = : b \in K, \circ b, b \circ a \quad [\text{定義}]$$

(5) $a \cup b$ は「 a と b をふくむ最小のクラス」を表示する式とし、それは「または」に対応するものであるが、次のように定義する。

$$a, b \in K, \circ, a \cup b = \overline{x \varepsilon (c \in K, a \circ c, b \circ c, \circ c, x \varepsilon c)} \quad [\text{定義}]$$

この定義でもわかるように、 $a \cup b$ は $a \cap b$ にくらべて、論理的にむずかしいものである。

(6) a がクラスであるとき、 $\sim a$ を次のように定義する。

$$a \in K, \circ \sim a = \overline{x \varepsilon (b \in K, a \cup b = \vee, \circ b, x \varepsilon b)}$$

否定が、 \cup と \vee によって表現されているところに特色があるが、否定概念は意外と複雑な扱いになる。

以上でわかるように、記号 \circ と \cap は命題またはクラスの間に使われている。記号 $=$, \wedge , \cup , \sim は、クラスに対して定義され、そして命題に対しても及ぼしていく。たとえば、

$$a \in K, \circ : \sim(x \varepsilon a) = . x \varepsilon \sim a$$

は、クラスの否定によって命題の否定を表わしているのである。

(7) なお、ペアノはカッコをやめるために、次のような記法を導入している。

$$a \in K, \circ : x \sim \varepsilon a = . \sim(x \varepsilon a) \quad [\text{定義}]$$

$$x \sim = y = . \sim(x = y) \quad [\text{定義}]$$

など。

この記法によって、命題 $a \sim = \wedge$ を考えれば、これは明らかに「gli a esistono」を意味する。ところでこの関係は、しばしば使用されるので、「 $\sim = \wedge$ 」の代りに一つの記号によって示すのが有用である。ここに記号 \exists が出現し (1897年)

$$a \in K, \circ : \exists a = . a \sim = \wedge \quad [\text{定義}]$$

として使われるようになった。記号 \exists は、ことば *esistono* の頭文字からのものである。

ペアノの記号—形式言語は、以上述べてきたように、ことばの頭文字からの象徴化であって、論理における固有性と識別性を高めようとしている配慮がみられる。すなわち、自然言語 (自国語) からの記号化の場合は、はっきりとわかる程度の進んだ記号化が、通常言語でない言語からの記号化の場合は、比較的ゆるやかであって、このことは、対象言語とメタ言語の区別への意識化につながるものである。

III. 論理記号の変容と定着

1. われわれが記号の特性を知ろうとするとき、記号のもつ象徴性—規約性、識別性、固有性、情報性 (伝達性)、思考性、あるいは発展性などなど、形態・機能・使いやすさなどを判断する。

論理記号は、ペアノ以後の人達に、どのように浸透していったのだろうか。

すでに述べたように、論理記号は、現在、統一的な使われ方をしていない。それはなぜだろうか。それは学派などという影響もあるだろうが、論理記号がまだ個人的なものとしても機能しうる、ということである。いいかえれば、多くの人達に使用されるということは、その記号がそれだけ威力を増し影響力が大きくなるし、また、それなりの“記号的よさ”を具えていたということにもなる。論理記号が、どういう人に、どのように浸透していったかを知る—変容と定着の度合を知ることで、記号の特性を把握してみよう。

まず、どういう人が、どのような論理記号を使っているかを調べてみる。(第2表)

この表は、むろん、すべてを尽したものではない。手元にある第一次資料 (原著) の範囲での調査である。ただ全体的な傾向、一つの流れというものが察せられよう。

大まかにいえば、ペアノーラッセル系、ヒルベルト系 (1949年頃まで)、ウカシェヴィッツ系、さらにハイティングやゲンツェンにも後世への影響の大きい創作があるから、彼らも系統として独立させることも考えられる。最近では、ヘルメス (Hermes, H.) やフロイデンタール (Freudenthal, H.) に、全称記号・存在記号に特徴をみせている。(註7)

2. 少しわしく調べてみよう。

(1) 《記法に関しては、可能なかぎりペアノに従うことにし、必要に応じて、彼の記法に補足してフレーゲやシュレーダーの記法にも従った。しかしながら、表記の多くは新しくあらねばならなかった。それは、他人の記号に依ったために不満足なものになってはいけなからであるが、一方まだ記号化されていない新しい考えを扱うのもいけなものである。……》⁽⁹⁾ これは、ホワイトヘッド—ラッセルの立場である。

(2) ハイティングは、はじめて、否定記号に記号 \neg を用いたが、これに関して次のように述べている。

《通常、記号 \sim は論理の否定に多く使われているだけでなく、多くの意味で用いられている。そこで、私は否定については新しい記号を選ぶ。》⁽⁶⁾

(3) 全称記号 \forall をはじめて採用し、 \rightarrow , $\&$, \vee , \circ , $\circ\circ$, \vee , \exists 用いることにしたゲンツェンは、

次のように述べている。

《 \forall , \exists , \mathfrak{A} はラッセルに負う。しかし、ラッセルの記号 \cdot , \equiv , \sim , $()$ は、数学において他の意味に用いられている。そこで、ヒルベルトの $\&$ を採ったが、一方ヒルベルトの記号 \sim (同値), $()$, \neg もまた、すでに他の意味をもつ。ヒルベルトの否定記号 \neg は、式表現の線形構図からは変則であって、いやなものである。そこで、同値と否定の記号に関してはハイティングのものを使った。そして、全称記号の \forall は \mathfrak{A} に対応させられるものである。》⁹⁾

彼のことばによれば、否定記号はハイティングのものを使ったことになるが、印刷されたテキスト(1935年のものなど)には記号 \neg が使われている。しかし1938年の小冊子¹⁰⁾では、記号 \neg が使われている。記号 \neg と \neg は、印刷上だけの問題と考えるとよいと思われる。

(4) ヒルベルト-アッケルマンの共著『Grundzüge der theoretischen Logik』は、論理学のヒルベルト学派の頂点に位置するもので、われわれにとっても“古典”といえるものである。初版(1928)に対して、第2版(1938)では、とくに述語論理の部分がかなり加筆改訂され、現在第5版(1967)まで版を重ねている。現行版のものは、初期版に対して、すっかり雰囲気が変わった、いわば“現代化”されてしまったともいえるものである。(私には、初期版のほうが、素朴で教育的であると思える。)注意しなければならないのは、初版ではヒルベルト自身が「はしがき」を書いているが、第2版以降はアッケルマンの署名による「はしがき」になっていることである。

さて、そのアッケルマンの『第4版へのはしがき(1958)』では、次のように述べられている。それはひじょうに興味深い内容である。

《旧版の読者達は、恐らく、十分な満足を得ないのではないかと思う。それは、私が命題の結合記号と限定記号を改めたからである。従来から使用しているヒルベルト流の記号がいろいろな不便をもたらしてきたので、私は十分熟慮の上、決心したのである。命題の同等(Gleichwertigkeit)を示す記号 \sim は、イギリス・アメリカの大多数の著作においては、否定の記号として使用されている。否定の \neg は実際的かつ教育的である。しかし、もし長い式で幾重も上に塗り重ねる場合には印刷上(typographische)面倒を生ずるかも知れない。ホワイトヘッドとラッセルによって導入された全称記号 (x) は述語の論理を表象しているし、また同様に、述語の適合さとしての (Ex) は x の存在(“E” auf x)と把握されうるものである。しかしながら、初めに使っていた記号 \neg , $\&$, \sim , (x) , $(\mathfrak{A}x)$ を、 \neg , \wedge , \leftrightarrow , $\forall x$, $\exists x$ に換えること

にする。 \rightarrow は \neg とちがって、命題を否定するためにその命題の左側におく。 \forall と \rightarrow については、もとのままである。私は私を記号に適合させた。》¹⁰⁾

として、数理論理学のドイツでの出版が、この記号に改められていく、と述べている。

このことは、情報伝達を滑らかにする・確かなものにするための記号の一義性も、その後の多くの人達によって用いられるという多数性の威力に従属させられた一つの例である。

3. いくつかの私論を付け加える。

(1) 否定記号について。

ブールに負う。 $\neg p$ に対して、 $\sim p$, $\neg p$, \bar{p} は、論理学における固有性、識別性がある。次に、 $\neg p$, $\sim p$, $\neg p$ に対しては「not- p 」, 「nicht- p 」, 「non- p 」などという読み方がなされているが、この読み方(語順)と、記法 $\neg p$, $\sim p$, $\neg p$ とは滑らかな対応がある。

ところで、ヒルベルトは、 \bar{p} を「 p -nicht」と読ませている¹¹⁾のが興味深い。

単一命題でなく、結合された命題に対する部分的または全体的な否定を作用させる場合、ヒルベルト式否定記号は、直接的であって、明瞭でしくじりのない理解が得られるもので、確かに“教育的”で“実際の”な記法といえよう。ただ、幾重にも \neg が重なるような場合すなわち否定作用が多い場合は、やはり問題があろう。もっとも、この場合は、 $\neg p$ 型についてもいえることであるが、

(2) 選言記号について。

記号 \vee の定着は、早くからなされている。「または」を意味するラテン語は二つある。一つは aut であり、他の一つは vel である。前者は排他的(非包含的)な「または」であり、後者は排他的でない包含的な「または」である。ラッセルは、この内容を明確にして、vel に負う記号 \vee を利用したと考えられる。

(3) 連言記号について。

$p \cdot q$ (または pq), $p \& q$ については明らかである。

ハイティングの記号 \wedge は、ピアノの記号がちょうど対比的に \cup と \cap になっているように、「または」の記号 \vee を天地逆さにしたところの規約的な記号であると考えられる。

(4) 存在記号について。

ピアノの記号 \mathfrak{A} については、すでに述べた。

ヒルベルトは記号 (Ex) を用いているが、これは「Es gibt ein x von...」の表象である。なぜなら、この記号 (Ex) は1923年頃から使われている¹²⁾が、“Seinzeichen”という言い方はあるが、“Existenz”ということばはみられないからである。

(5) 全称記号について。

ゲンツェンの記号 \forall については、すでに述べた。

ラッセルの記号 (x) については、彼は
 $(x) \cdot \phi x$: 「All values of the function ϕx are true」
 : 「All propositions of the form ϕx are true」
 : 「 ϕx always」を意味する

と述べている。記号 (x) は、英語語法から、述語論理であることの強調記号、「すべてについて」「つねに」の強調記号と考えられる。

最近、 $(\exists x)$, $(\forall x)$ の意味で、記号 $\forall x$, $\wedge x$ も目立つ。

《記号 \wedge は、 \wedge の大きい形のものであって、 \wedge で結合された命題を一般化して、全称記号からはじまる一つの命題にするものである。

記号 \forall は、 \forall の大きい形のものであって、 \forall で結合された命題を一般化したところの、存在記号からはじまる一つの命題にするものであると解釈できる。》⁽⁴⁾
 したがって、この記号 $\forall x$, $\wedge x$ は、 Σx , Πx と思想的に同じ系列のものであると考えられる。

(6) 含意記号について。

ラッセルの記号 \supset は、ペアノの記号 \supset と本質的に同じものであるが、さらに記号化したとも、書きやすくしたともいえるものである。^(注8)

ヒルベルトの記号 \rightarrow は、思考性のあるよい記号とみられるが、その由縁については、今のところ知らない。

なお、結語法観点からは、ウカシェヴィッツのポーランド記法は独特な立場にある。それは演算的・思考的な記法である。数学で、「 x と y は、 R という関係にある」という関係・関数を表示するとき、「 $x R y$ 」とか「 $R x y$ (または $R(x, y)$)」という式表現がしばしば用いられる。 $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$ などを、 $x R y$ に対応させれば、 Kpq , Apq , Cpq は、 Rxy に対応する表示法である。

IV. 教授場面における一・二の問題

1. アリストテレスは、三段論法の作者として、よく知られている。哲学者は、アリストテレスのこの論法に関心を寄せ、論理学の全体が三段論法理論によって包含されるのではないかと、とまで考えられたものである。カントでさえ、この気持をもっていただけである。

ブール、ペアノ、ヒルベルトらによって開花した現代論理学に到るまでには、多くの日時と多くの人達が介在していた。それがあったからこそ、数理論理学が結実したのもある。ただその研究対象が、アリストテレスの論理問題に限られていたようである。そこで追求された、いわゆる“A”, “E”, “I”, “O” や三段論法は、今日の立場では、論理学の一部になってしまっているが。さて、ペアノ (1908) によれば、三段論法は次の

ようである。

(I) $a, b \in Cls. x \in a. a \supset b. \supset. x \in b$

$a, b, c \in Cls. a \supset b. b \supset c. \supset. a \supset c$

《Si a, b, c indica tres classe, et si omni a es b , et si omni b es c , tunc omni a es c 》^(注9)

ところで、多くの場合、

(II) すべての M は P である。

すべての S は M である。

したがって、すべての S は P である。

の形を示して、これがアリストテレスの三段論法である、と説明されることがしばしばある。

確かに、この型(II)は、伝統的な論理学において定式化されているものである。しかし、本来のアリストテレスの三段論法ではない。ウカシェヴィッツも、このことを指摘している。⁽⁶⁾

「…………ならば、…………である。」という表現(I)と、「…………。したがって…………である。」という表現(II)の間のちがいは何だろうか。

まず、前者は、条件文で、しかも全体でもって一つの文である。

それに対して後者は、三つの文から成り立っており、「したがって」は二つの前提から結論を引き出すために用いられるものである。すなわち、推論の型である。

このことを、具体的な命題で考えてみる。

- すべての (人間) は (死すべきもの) である。
- すべての (アリストテレス) は (人間) である。

したがって、すべての (アリストテレス) は (死すべきもの) である。

- すべての (人間) は (植物) である。
- すべての (アリストテレス) は (人間) である。

したがって、すべての (アリストテレス) は (植物) である。

- すべての (人間) は (植物) である。
- すべての (桜) は (人間) である。

したがって、すべての (桜) は (植物) である。

これらの妥当性は、どうだろうか——。

上の例を、(I)型で表現してみる。

- もし、すべての (人間) が (死すべきもの) でそしてすべての (アリストテレス) が (人間) であるなら、すべての (アリストテレス) は (死すべきもの) である。
- もし、すべての (人間) が (植物) でそしてすべての (アリストテレス) が (人間) であるなら、すべての (アリストテレス) は (植物) であ

る。

もし、すべての(人間)が(植物)でそしてすべての(桜)が(人間)であるなら、すべての(桜)は(植物)である。

いずれも、おかしくはない。

さて、(I)型、(II)型とも、文字は名辞であるが、これを命題におきかえて、(I)、(II)の関わりをさらに調べてみよう。

$$(II)' \quad \begin{array}{l} p \text{ なら } q \\ \hline p \\ \hline \text{したがって, } q \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \hline p \\ \hline \therefore q \end{array} \right) \quad (\text{注10})$$

これは、“Modus ponens”といわれる推論形式であるが、これを(I)型にしてみると、

$$(I)' \quad \text{もし} ((\text{もし } p \text{ なら } q) \text{ そして } p) \text{ なら, } q \\ [((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q]$$

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
Y	Y	Y	Y	Y
Y	人	人	人	Y
人	Y	Y	人	Y
人	人	Y	人	Y

(第3表)

すなわち、(I)は、 p, q が真偽いずれであっても、恒に真(トートロジー)である。

一方、(II)'は、二つの前提 p と $p \rightarrow q$ から q を導くものであって、 p と $p \rightarrow q$ とがともに真であるとき、 q も真であると結論できるものである。

2. なお、上述のことに関連して、含意命題「 $p \rightarrow q$ 」を理解させる(正しくは、定義を納得させる)のは、他の命題「 $\neg p, p \wedge q$ 」などよりもむずかしいといわれる。すなわち、心理的抵抗である。それは、 p, q の真偽に従って、 $(p, q) = (Y, Y), (Y, 人), (人, Y), (人, 人)$ を考え、それに応じて「 $p \rightarrow q$ 」の真偽を対応させるという教授法をとるとき、 $(人, Y), (人, 人)$ に対して抵抗があるのである。

構成的には、 $(Y, Y), (Y, 人), (人, Y), (人, 人)$ と $(Y, 人, Y, Y)$ との対でもって、「 $p \rightarrow q$ 」を定める。

さて、「 $p \rightarrow q$ 」が偽であるのは、 p が真で q が偽の場合であることは日常的にも明瞭である。そこで $(Y, 人)$ を除外する。すなわち、残りの可能性に対しては「 $p \rightarrow q$ 」は偽でないのである。すなわち、可能性のうちの $(人, Y), (人, 人)$ を排除する論理的理由はない。また、“偽ではない”のだから、それは真であるとせざ

る得ない。

したがって、結果をまとめてみると、次のようになる。

p	q	$p \rightarrow q$
Y	Y	Y
Y	人	人
人	Y	Y
人	人	Y

(第4表)

という、よく知られた真理表が作られる。

そして、逆に、これでもって定義とすることができるのである。

そこには、積極的否定とか、消極的採用とかの精神が隠されてしまっているのである。構成的観点では、むしろこういった認識は閉じ込められ、第一義ではなくなっているのである。

因みに、「 $p \rightarrow q$ 」についてのヒルベルトの定義は、“偽”でもってなされている¹⁰⁾がそれは、この心理性の排除を示しているといえよう。

3. さらにまた、上述-1.に関連して、われわれが論理を思考対象とするとき、留意しなければならないことの一つに、「対象言語」と「観察者の言語」の区別がある。「 p かつ q 」、「 p または q 」、「 p なら、 q 」等々の表現を用いてきたが、それは読み方中心の表示であって、実は、中途半端な表現であると言わざるを得ない。

大まかに言えば、命題を考えるとき、それを一般に p, q と文字で置き換えれば、それは記号論理学では対象言語レベルである。それに対して、たとえば命題「 $p \wedge q$ 」を考えるというのは、『かつ』という概念を思考対象にしていることで、

したがって記号論理学では、「かつ」という日本語はメタ言語レベルである。したがって、『 p かつ q 』という表現は、観察者の言語と対象言語が結合されているところのおかしな表現であるということになる。

ただ、読みことば「 p かつ q 」、「 p または q 」などのほうが理解されやすいので、教育的配慮による“かりそめの表現”である、のなら問題点は一応薄くならう。

なお、わが国高校の学習指導要領では、論理記号を用いないことになっているから、上述の問題点はさておきとして、検定教科書に一つの興味あるしかし気になる傾向がみられる。すなわち、否定命題、含意命題、同値では論理記号を用いて $\bar{p}, \sim p, \bar{p}(x), \sim p(x); p \rightarrow q, p \Rightarrow q, p(x) \rightarrow q(x); p \Leftrightarrow q, p \Leftrightarrow q, p \Leftrightarrow q, p(x) \Leftrightarrow q(x)$ なる

- (8) Heyting, A. : Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. (Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften, II, p. 43, 1930)
- (9) Gentzen, G. : Untersuchungen über das logische Schliessen I. (Mathematische Zeitschrift, Bd. 39, p. 178, 1935.)
- (10) Gentzen, G. : Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, Heft 4, p. 22, 1938.
- (11) Hilbert, D. und W. Ackermann : Grundzüge der theoretischen Logik. 5 Auflage, Springer-Verlag, p. vi, 1967.
- (12) Hilbert, D. und W. Ackermann : Grundzüge der theoretischen Logik. Verlag von Julius Springer, p. 3, 1928.
- (13) Hilbert, D. : Die logischen Grundlagen der Mathematik. (Mathem. Annalen, Bd. 88, p. 154, 1923)
- (14) Hermes, H. ; Einführung in die mathematische Logik. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, pp. 41-42, 1963.
- (15) 上 掲 (2), p. 10.
- (16) 上 掲 (12), p. 4.

Abstracted

In this paper, I investigate the sources and the developments on the "Logical Symbols", through adaptations of logical thoughts, within our school mathematics.

Giuseppe Peano, a mathematician in Italy, carried out an important part in symbolism of logic, because logical symbols we use generally are led by him. His ideas was expressed by uses of ε , \exists , $=$, \cap , \cup , \sim , \wedge . as the primitive ideas. (Still, he introduced the existence-quantifier $\exists a$ in 1897.)

His symbolism-formal language does not symbolize a contraction, an abbreviation, and a substance in short hand. That is, it does not mean "words", but "expressions of ideas".

B. Russell has developed the ideas and the symbols of Peano. The other side, D. Hilbert adopted his own symbols which he formulated and systematized logical ideas from a mathematical standpoint. For instance, he devised \bar{p} in place of the negation $\neg p$, $p \& q$ in place of the conjunction $p \cdot q$, $p \rightarrow q$ in place of the implication $p \supset q$, $p \sim q$ (\Leftrightarrow , \leftrightarrow) in place of the equivalence (logical connective) $p \equiv q$, and $(\exists x)$ in splace of $(\exists x)$ etc. His symbol $(\exists x)$ represent "Es gibt ein x von".

Further, A. Heyting (and G. Gentzen) adopted $\neg p$ as the negation, G. Gentzen adopted $(\forall x)$ as the all-quantifier, and Skolem, Hermes, and Freudenthal use $\wedge x$, $\vee x$, the recent symbols, as the quantifiers.